Éléments MEMBRANE et GRILLE_MEMBRANE

Résumé :

Ce document décrit la formulation et l'implantation dans *Code_Aster* des éléments MEMBRANE et GRILLE_MEMBRANE. Les éléments MEMBRANE permettent de modéliser un comportement linéaire de membrane quelconque. Les éléments GRILLE_MEMBRANE sont des éléments finis plus spécifiquement dédiés à la représentation d'armatures d'acier dans un massif (pour des applications de Génie Civil type béton armé). Les principales caractéristiques de ces éléments sont les suivantes :

- éléments de membrane, sans rigidité de torsion ;
- pas de degrés de liberté de rotation, mais en contrepartie pas de possibilité d'excentrement ;
- support géométrique surfacique (triangle, quadrangle ; linéaire ou quadratique) ;

Les éléments GRILLE_MEMBRANE permettent de modéliser un comportement non-linéaire des barres d'armature, ce qui n'est pas le cas des éléments MEMBRANE.

1 Introduction

La modélisation MEMBRANE permet de représenter le comportement mécanique d'une membrane éventuellement anisotrope. Précisons qu'elle est actuellement limitée à des comportements linéaires. Elle permet de modéliser des éléments de structure dont la rigidité de flexion est négligeable.

Les éléments GRILLE_MEMBRANE permettent de représenter le comportement éventuellement non-linéaire de barres d'armature dans une structure en béton armé. La principale contrainte est que les barres d'armature doivent être périodiquement réparties sur une surface, et orientées toutes dans la même direction. Précisons cependant que des barres d'armatures croisées peuvent être modélisées par superposition de deux modélisations GRILLE_MEMBRANE (voir plus loin).

Les éléments de type GRILLE_MEMBRANE viennent compléter les possibilités de modélisation d'armature dans *Code_Aster*, en complément de la modélisation GRILLE_EXCENTRE. On présente ci-dessous les différences entre les modélisations GRILLE_MEMBRANE et GRILLE_EXCENTRE.

On rappelle que la modélisation GRILLE_EXCENTRE est basée sur une cinématique de coque DKT avec une seule couche dans l'épaisseur [R3.07.03]. Ce soubassement DKT implique la présence de degrés de liberté de rotation aux nœuds des éléments GRILLE_EXCENTRE: s'il permet la notion d'excentrement, il est inutile lorsque l'on n'a pas besoin d'excentrement (dans ce cas il alourdit le modèle de façon inutile, car non seulement les degrés de libertés de rotation allongent le vecteur d'inconnues, mais il faut de plus bloquer un nombre non négligeable de ces degrés de libertés par double multiplicateur de Lagrange). La modélisation GRILLE_MEMBRANE est une modélisation basée sur une cinématique « surfacique », elle ne nécessite pas d'autres degrés de liberté que les déplacements habituels (en revanche, bien évidemment, cette modélisation ne permet pas d'utiliser la notion d'excentrement).

La modélisation GRILLE_EXCENTRE, basée sur DKT, nécessite des éléments géométriques de support de type triangle ou quadrangle linéaire ; la modélisation GRILLE_MEMBRANE est développée à partir des supports géométriques surfacique triangle ou quadrangle, linéaire ou quadratique.

Pour les deux types de modélisation, en revanche, seule une direction d'armature est disponible par éléments finis. Cela permet de modéliser tout type d'armature à plusieurs directions, en superposant un élément par direction ; le coût de calcul engendré par ces duplications est faible : pas de duplication des degrés de libertés (donc coût d'inversion de matrice constant), duplication des calculs élémentaires (mais ils restent simples, en nombre réduit en 3D – éléments de surfaces contre éléments de volume – et les calculs élémentaires pour des structures à grands nombres de degrés de liberté sont de coût faible comparé au coût d'inversion).

2 Formulation des éléments de MEMBRANE

Pour un élément de membrane, l'énergie de déformation peut se mettre sous la forme :

$$\Phi=\frac{1}{2}\int \boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon}\, ds$$

avec $\boldsymbol{\sigma}$ la contrainte membranaire et $\boldsymbol{\varepsilon}$ la déformation membranaire.

La seule difficulté est d'obtenir une expression du type $\boldsymbol{\varepsilon}=BU_{nodal}$.

Pour cela, il faut utiliser un peu de géométrie différentielle. On part de l'expression de la dérivée contravariante :

$$\nabla u=\frac{\partial u^i}{\partial \xi_j}=u^i|_j a_i\otimes a^j=u^i|_j g^{jk} a_i\otimes a_k$$

avec $\{\xi_j\}$ un paramétrage admissible de la surface et $a_i=\dfrac{\partial x}{\partial \xi_i}$.

en notant a la base naturelle (non orthogonale, seul le 3ème vecteur, normal à la surface, est normé) du plan de l'armature et g la métrique contravariante associée à cette base (cf. [R3.07.04].pour plus de détails).
On définit alors la direction d'armature par le vecteur normé e_1 (que l'on complète, pour la facilité de l'exposé en une base orthonormée $\{e_i\}$) et l'on appelle R l'opérateur de passage tel que $a_i=R_i^p e_p$
. On note en grec les indices ne prenant que les valeurs dans $\{1,2\}$, et on obtient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=(\nabla u)_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi^j}\cdot a^i\right) R_i^\alpha R_k^\beta g^{jk}$$

Par définition de R : $R_3^1=0$ et par définition de g : $g^{13}=g^{23}=0$. On obtient donc :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=(\nabla u)_{\alpha\beta}=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi^\delta}\cdot a^\gamma\right) R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta}$$

Si l'on note maintenant $\hat{B}$ la dérivée des fonctions de forme au point de Gauss envisagé, il vient :

$$\varepsilon_{\alpha\beta}=R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta} \hat{B}_{\delta n}(a^\gamma)_i U_{in}$$

d'où le B cherché.

$$B_{in}=R_\gamma^\alpha R_\theta^\beta g^{\delta\theta} \hat{B}_{\delta n}(a^\gamma)_i$$

A partir de B , on a alors toutes les expressions classiques de la déformation, des forces nodales et de la matrice tangente qui s'écrivent :

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\varepsilon}=BU\\&F=\int B^T\sigma\\&K=\int B^T\frac{\partial\sigma}{\partial\varepsilon}B\end{aligned}$$

3 Formulation des éléments de GRILLE_MEMBRANE

Pour une nappe d'armature uniaxiale, l'énergie de déformation peut se mettre sous la forme :

$$\Phi=\frac{1}{2}\int S\,\sigma\,\varepsilon\,ds$$

avec S la section d'armature par unité de longueur, σ la contrainte (scalaire) et ε la déformation (scalaire).

On cherche à obtenir une expression du type $\varepsilon=BU_{nodal}$.

En reprenant la démarche de la section précédente, on démontre cette fois-ci que :

$$\varepsilon=(\nabla u)_{11}=\left(\frac{\partial u}{\partial \xi^\beta}\cdot a^\alpha\right) R_\alpha^1 R_\gamma^1 g^{\beta\gamma}$$

En introduisant la dérivée $\hat{B}$ des fonctions de forme au point de Gauss envisagé, il vient :

$$\varepsilon = R^1_\alpha R^1_\gamma g^{\beta\gamma} \hat{B}_{\beta n} \left(a^\alpha\right)_i U_{in}$$

d'où le B cherché. On notera qu'il a la forme d'un vecteur, due à la nature scalaire de la déformation recherchée.

$$B_{in} = R^1_\alpha R^1_\gamma g^{\beta\gamma} \hat{B}_{\beta n} \left(a^\alpha\right)_i$$

A partir de B , on retrouve toutes les expressions classiques de la déformation, des forces nodales et de la matrice tangente qui s'écrivent :

$$\begin{aligned} &\varepsilon = BU \\ &F = \int B^T \sigma \\ &K = \int B^T \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} B \end{aligned}$$

On notera que ce sont les lois de comportement 1D qui sont utilisées pour obtenir la contrainte à partir de la déformation. Toutes les lois de comportement disponible en 1D sont utilisables. A défaut, on peut également utiliser les lois 3D, grâce à la méthode De Borst.

4 Description des versions du document

Version Aster	**Auteur(s) Organisme(s)**	**Description des modifications**
7.4	P.Badel EDF-R&D/AMA	Texte initial
9.5	J.M.Proix EDF-R&D/AMA	Modification de GRILLE en GRILLE_EXCENTRE
11.3	M. David EDF-R&D/AMA	Ajout de la modélisation MEMBRANE et modifications mineures