Traitement de l'excentrement pour les éléments de plaque DKT, DST, DKQ, DSQ et Q4G

Résumé :

Les éléments de plaque [R3.07.03] sont destinés aux calculs de structures minces tridimensionnelles. Le feuillet moyen de ces structures ne coïncide pas toujours avec le plan d'épure ou plan de maillage. On introduit donc la notion d'excentrement du feuillet moyen par rapport au plan d'épure. Elle est utilisable pour des éléments avec prise en compte du cisaillement transverse, ou sans cette hypothèse.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Table des matières

1Introduction....5
2Formulation....6
2.1Géométrie....6
2.2Cinématique....7
2.3Loi de comportement....8
3Principe des travaux virtuels....9
3.1Travail de déformation....9
3.1.1Expression des efforts résultants....9
3.1.2Relation efforts résultants déformations généralisées....9
3.1.3Energie interne élastique de plaque....11
3.1.4Remarque....12
3.2Travail des forces et couples extérieurs....14
3.3Principe du travail virtuel et équations d'équilibre....14
4Discrétisation numérique de la formulation variationnelle issue du principe du travail virtuel....15
4.1Introduction....15
4.2Discrétisation du champ de déplacement....16
4.3Prise en compte de la distorsion transverse....17
4.3.1Pour les éléments Q4□....17
4.3.2Pour les éléments du type DKT,DST,DKQ,DSQ....19
4.4Matrice de rigidité élémentaire....22
4.4.1Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments Q4□....22
4.4.2Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments DKT, DKQ....22
4.4.3Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments DST, DSQ....22
4.5Matrice de masse élémentaire....24
4.5.1Matrice de masse élémentaire classique....24
4.5.1.1Élément Q4□....24
4.5.1.2Eléments du type DKT, DST....25
4.5.2Matrice de masse élémentaire améliorée....26
4.5.2.1Éléments du type DKT 26
4.5.2.2Eléments du type DST....28
4.5.2.3Eléments du type Q4□....32
4.5.2.4Remarque....33
5Mise en œuvre et post-traitements....33
5.1Application des efforts et couples....33
5.2Application des conditions aux limites en déplacement....34
5.3Post-traitements....34
6Validation statique et modale....35
6.1Validation initiale....35

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6.2Cas-test SSLS111 : excentrement pour des plaques simples.....35
6.3Cas-test SSLS112 : excentrement pour des plaques composites.....35
7Conclusion.....36
8Références bibliographiques.....36
9Description des versions du document.....36
Annexe 1Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques orthotropes ou stratifiées excentrées.....37

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

1 Introduction

Dans le but de pouvoir analyser le comportement de structures élancées de type plaque, ou surfaces courbes approchées par des facettes, dont le feuillet moyen est excentré par rapport au plan d'application des efforts, on introduit la notion d'excentrement du feuillet moyen par rapport à la surface de maillage. Les champs de déplacement variant linéairement dans l'épaisseur de la plaque ont pour origine la surface de maillage, c'est-à-dire qu'au niveau de la surface de maillage, les seuls degrés de liberté de translation sont nécessaires à la description du déplacement.

L'introduction de la cinématique dans l'expression du travail de déformation permet d'obtenir les rigidités de membrane, de flexion et de cisaillement transverse de l'élément excentré à partir de celles de l' élément équivalent non excentré et de la distance d'excentrement. L'ensemble des calculs (hors post-traitement spécifique) est donc fait dans un repère d'épure attaché au plan du maillage. Par défaut les résultats sont donc obtenus dans le repère du maillage. Pour certains post-traitements, il est possible d'avoir automatiquement ces résultats dans d'autres repères dans la mesure où l'utilisateur indique la position du plan de post-traitement par rapport au plan du maillage.

La distance d'excentrement entre le plan du maillage et le feuillet moyen de la plaque est donnée dans AFFE_CARA_ELEM au même niveau que l'épaisseur. Un excentrement d positif signifie que la surface moyenne de la plaque est en réalité à une distance $d\,\boldsymbol{n}$ de l'élément de plaque maillé, la direction $\boldsymbol{n}$ étant donnée par la normale à l'élément (voir [§4.1] de la documentation de référence [R3.07.03] des éléments de plaque pour la construction de cette normale).

Les notations adoptées sont celles de la note [R3.07.03] sur les éléments de plaques DKT, DST, DKQ, DSQ et Q4G.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2 Formulation

2.1 Géométrie

Pour les éléments de plaque excentrés, la surface de référence est donnée par le plan d'épure ou plan du maillage (plan $x\,y$ par exemple). Le feuillet moyen de l'élément est positionné par rapport à cette surface de référence. L'épaisseur $h(x,y)$ doit être petite par rapport aux autres dimensions (extensions, rayons de courbure) de la structure à modéliser. La figure [Figure 2.1-a] ci-dessous illustre notre propos. Concernant la valeur de l'excentrement d, et du fait des conditions de linéarisation de la flexion adoptées dans la théorie, on prendra d de sorte qu'un élément d'épaisseur $d+h$ reste dans la théorie des plaques.

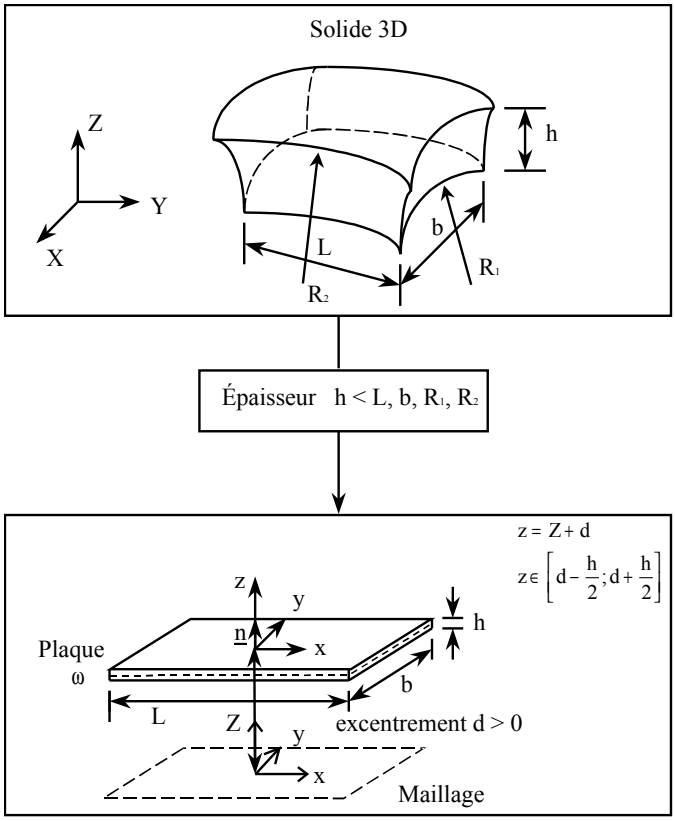


Figure 2.1-a

On attache au plan d'épure (le plan du maillage) un repère orthonormé local $0\mathrm{xyz}$ associé au plan du maillage différent du repère global $OXYZ$. La position des points de la plaque est donnée par les coordonnées cartésiennes (x,y) dans le plan d'épure (plan du maillage) et l'élévation z par rapport à ce plan.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

2.2 Cinématique

Les sections droites qui sont les sections perpendiculaires au feuillet moyen de la plaque restent droites. Les points matériels situés sur une normale à la surface moyenne non déformée restent sur une droite dans la configuration déformée. Il résulte de cette approche que les champs de déplacement varient linéairement dans l'épaisseur de la plaque. Si l'on désigne par u, v, w les déplacements d'un point du plan d'épure $q(x, y, z)$ suivant x, y et z, la cinématique de Hencky-Mindlin nous donne :

$$\begin{pmatrix} u_x(x,y,z) \\ u_y(x,y,z) \\ u_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \theta_y(x,y) \\ -\theta_x(x,y) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \\ w(x,y) \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \beta_x(x,y) \\ \beta_y(x,y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

où : u, v, w sont les déplacements du plan d'épure ;
θ_x et θ_y sont respectivement les rotations de ce plan par rapport à respectivement l'axe x et l'axe y.

On préfère introduire les deux rotations $\beta_x(x,y)=\theta_y(x,y), \beta_y(x,y)=-\theta_x(x,y)$. Les déformations tridimensionnelles en tout point, avec la cinématique introduite précédemment, sont ainsi données par :

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = e_{xx} + z\kappa_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = e_{yy} + z\kappa_{yy} \\ 2\varepsilon_{xy} = \gamma_{xy} = 2e_{xy} + 2z\kappa_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} = \gamma_x \\ 2\varepsilon_{yz} = \gamma_y \end{cases}$$

où : e_{xx}, e_{yy} et e_{xy} sont les déformations membranaires de la surface moyenne ;
γ_x et γ_y les déformations associées aux cisaillements transverses ;
κ_{xx}, κ_{yy}, κ_{xy} les déformations de flexion de la surface moyenne, qui s'écrivent :

$$\begin{cases} e_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ e_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ 2e_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \kappa_{xx} = \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \kappa_{yy} = \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ 2\kappa_{xy} = \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \gamma_x = \beta_x + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_y = \beta_y + \dfrac{\partial w}{\partial y} \end{cases}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

- *dans les théories de plaque, l'introduction de β_x et β_y permet de symétriser les formulations des déformations et les équations d'équilibre [R3.07.03]. Dans les théories de coque, on utilise plutôt θ_x et θ_y et les couples associés M_x et M_y par rapport à x et y,*
- *les degrés de liberté que l'on a choisi sont les déplacements et rotations du plan d'épure et non pas ceux du feuillet moyen. En effet si l'on envisage la superposition de plusieurs plaques excentrées pour réaliser un matériau sandwich il ne peut correspondre aux nœuds du maillage qu'un seul champ de déplacement et non pas les différents champs de déplacements des couches composant le matériau.*

2.3 Loi de comportement

Le comportement des plaques est un comportement 3D en "contraintes planes". **La contrainte transversale σ_{zz} est prise nulle** car négligeable par rapport aux autres composantes du tenseur des contraintes (hypothèse des contraintes planes). La loi de comportement la plus générale s'écrit alors ainsi :

$$\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\\ \sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{pmatrix} = \mathbf{C}(\varepsilon,\alpha)\begin{pmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\\ \gamma_{x}\\ \gamma_{y}\end{pmatrix} = \mathbf{C}\mathbf{e} + z\mathbf{C}\kappa + \mathbf{C}\gamma \text{ avec } \mathbf{e} = \begin{pmatrix}e_{xx}\\ e_{yy}\\ 2e_{xy}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \quad \kappa = \begin{pmatrix}\kappa_{xx}\\ \kappa_{yy}\\ 2\kappa_{xy}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \quad \text{et } \gamma = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \gamma_{x}\\ \gamma_{y}\end{pmatrix}$$

où : $C(\varepsilon,\alpha)$ est la matrice de rigidité tangente locale en contraintes planes ;
α représente l'ensemble des variables internes lorsque le comportement est non linéaire.

Pour des comportements (par exemple des multicouches) pour lesquels les distorsions sont couplées aux déformations de membrane et de flexion, $C(\varepsilon,\alpha)$ se met sous la forme :

$$C = \begin{pmatrix} H & H_{c\gamma} \\ H^{T}_{c\gamma} & H_{\gamma} \end{pmatrix}$$

où : $H(\varepsilon,\alpha)$ est une matrice 3×3 symétrique ;
$H_{\gamma}(\varepsilon,\alpha)$ une matrice 2×2 symétrique ;
$H_{c\gamma}(\varepsilon,\alpha)$ une matrice 3×2 de couplage entre les effets de membrane ou de flexion et de cisaillement transverse.

Dans le cas où c'est découplé, on a $H_{c\gamma}(\varepsilon,\alpha)=0$. La détermination de $H_{\gamma}(\varepsilon,\alpha)$ dans le cadre de la théorie de Reissner ([§2.2.3.2] de [R3.07.03]) est donnée en annexe. On montre qu'elle est équivalente à celle des plaques non excentrées.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3 Principe des travaux virtuels

3.1 Travail de déformation

L'expression générale du travail de déformation 3D pour l'élément de plaque excentré de la distance d par rapport au plan de référence vaut :

$$W_{\text{def}} = \int_S \int_{d-h/2}^{d+h/2} (\varepsilon_{xx}\sigma_{xx} + \varepsilon_{yy}\sigma_{yy} + \gamma_{xy}\sigma_{xy} + \gamma_x\sigma_{xz} + \gamma_y\sigma_{yz})\, dV$$

où S est la surface moyenne, $dV = dxdydz$ et où la position dans l'épaisseur de la plaque varie entre $d \quad h/2$ et $d + h/2$.

3.1.1 Expression des efforts résultants

En adoptant la cinématique de [R3.07.03], on identifie le travail des efforts intérieurs :

$$W_{\text{def}} = \int_S (e_{xx}N_{xx} + e_{yy}N_{yy} + 2e_{xy}N_{xy} + \kappa_{xx}M_{xx} + \kappa_{yy}M_{yy} + 2\kappa_{xy}M_{xy} + \gamma_x T_x + \gamma_y T_y)\, dS$$

où :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{d-h/2}^{d+h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} dz$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{d-h/2}^{d+h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix} z\, dz$$

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_x \\ T_y \end{pmatrix} = \int_{d-h/2}^{d+h/2} \begin{pmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} dz$$

où : N_{xx} , N_{yy} , N_{xy} sont les efforts résultants de membrane (en N/m) ;
M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} sont les efforts résultants de flexion ou moments par rapport au plan d'épure (en N) ;
T_x , T_y sont les efforts résultants de cisaillement ou efforts tranchants (en N/m).

3.1.2 Relation efforts résultants déformations généralisées

L'expression du travail de déformation s'écrit aussi :

$$W_{\text{def}} = \int_S \int_{d-h/2}^{d+h/2} [\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{C}(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha)\boldsymbol{\varepsilon}]dV = \int_S \int_{d-h/2}^{d+h/2} [\mathbf{e}\mathbf{C}\mathbf{e} + z\mathbf{e}\mathbf{C}\boldsymbol{\kappa} + \mathbf{e}\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} + z\boldsymbol{\kappa}\mathbf{C}\mathbf{e} + z^2\boldsymbol{\kappa}\mathbf{C}\boldsymbol{\kappa} + z\boldsymbol{\kappa}\mathbf{C}\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{\gamma}\mathbf{C}(\mathbf{e} + z\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{\gamma})]dSdz$$

où : $C(\varepsilon, \alpha)$ est la matrice de rigidité tangente locale (matrice symétrique).

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ceci s'écrit encore :

$$W_{def} = \int_S \int_{-h/2}^{h/2} [\mathbf{eCe} + (\zeta+d)\mathbf{eC}\kappa + \mathbf{eC}\gamma + \kappa(\zeta+d)\mathbf{Ce} + (\zeta+d)^2\kappa\mathbf{C}\kappa + \kappa(\zeta+d)\mathbf{C}\gamma + \gamma\mathbf{C}(\mathbf{e}+(\zeta+d)\kappa+\gamma)]dSd\zeta$$

En utilisant l'expression obtenue pour W_{def} au paragraphe précédent, on trouve la relation suivante entre les efforts résultants et les déformations généraliées :

$$\mathbf{N} = \mathbf{H_m e} + (\mathbf{H_{mf}} + d\mathbf{H_m})\kappa + \mathbf{H_{m\gamma}}\gamma$$
$$\mathbf{M} = (\mathbf{H_{mf}} + d\mathbf{H_m})\mathbf{e} + (\mathbf{H_f} + 2d\mathbf{H_{mf}} + d^2\mathbf{H_m})\kappa + (\mathbf{H_{f\gamma}} + d\mathbf{H_{m\gamma}})\gamma$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{H_{m\gamma}^T e} + (\mathbf{H_{f\gamma}^T} + d\mathbf{H_{m\gamma}^T})\kappa + \mathbf{H_{ct}}\gamma$$

avec :

$$\mathbf{H_m} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H} d\zeta \qquad \mathbf{H_{mf}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}\zeta d\zeta \qquad \mathbf{H_f} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}\zeta^2 d\zeta$$
$$\mathbf{H_{ct}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}_\gamma d\zeta \qquad \mathbf{H_{m\gamma}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}_{c\gamma} d\zeta \qquad \mathbf{H_{f\gamma}} = \int_{-h/2}^{+h/2} \mathbf{H}_{c\gamma}\zeta d\zeta$$

et :

$$\mathbf{e} = \begin{pmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ 2e_{xy} \end{pmatrix}, \qquad \kappa = \begin{pmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{yy} \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{pmatrix}$$

Les matrices H_m, H_f et H_{ct} sont les matrices de rigidité en membrane, flexion et cisaillement transverse, respectivement, pour l'élément de plaque non excentré. La matrice H_{mf} est une matrice de rigidité de couplage entre la membrane et la flexion pour l'élément de plaque non excentré. Elle est nulle si l'élément de plaque est symétrique par rapport à son feuillet moyen. La matrice $H_m\gamma$ est une matrice de rigidité de couplage entre la membrane et la distorsion transverse. La matrice $H_f\gamma$ est une matrice de rigidité de couplage entre la flexion et la distorsion transverse. Ces matrices sont nulles pour un excentrement nul, sauf dans le cas des multicouches où elles restent non nulles.

Pour un comportement élastique homogène isotrope, ces matrices ont pour expression :

$$\mathbf{H_m} = \frac{Eh}{1-\nu^2}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H_f} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{H_{ct}} = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et $H_{mf} = H_m\gamma = H_f\gamma = 0$ car il y a une symétrie matérielle par rapport au plan $\zeta = 0$.

Pour la détermination du coefficient de cisaillement k on renvoie au [§2.2.3] de [R3.07.03].

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le système de relation entre les efforts résultants et les déformations généralisées peut aussi s'écrire :

$$\mathbf{N} = \mathbf{H_m}\mathbf{e} + \mathbf{H'_{mf}}\kappa + \mathbf{H_{m\gamma}}\gamma$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{H'_{mf}}\mathbf{e} + \mathbf{H'_f}\kappa + \mathbf{H'_{f\gamma}}\gamma$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{H^T_{m\gamma}}\mathbf{e} + \mathbf{H'^T_{f\gamma}}\kappa + \mathbf{H_{ct}}\gamma$$

avec :

$$\mathbf{H'_{mf}} = \mathbf{H_{mf}} + d\mathbf{H_m}$$
$$\mathbf{H'_f} = \mathbf{H_f} + 2d\mathbf{H_{mf}} + d^2\mathbf{H_m}$$
$$\mathbf{H'_{f\gamma}} = \mathbf{H_{f\gamma}} + d\mathbf{H_{m\gamma}}$$

Ainsi, dans le cas d'une plaque possédant la symétrie matérielle par rapport au plan $\zeta = 0$, on a $H_{mf} = 0$ mais $H'_{\mathbf{mf}} = dH_m$. L'excentrement de la plaque entraîne un couplage entre les termes de membrane et de flexion.

Remarques :

Les relations liant H_m, H_f, H_{mf} à H et H_{ct} à H_γ sont valides quelle que soit la loi de comportement élastique tangente, avec déformations anélastiques (thermoélasticité, plasticité, ...).

Pour une plaque constituée de N couches orthotropes en élasticité, les matrices H_m, H_f, H_{mf} et H_{ct} s'écrivent :

$$\mathbf{H_m} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H_{mi}}, \qquad \mathbf{H_{mf}} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{H_{mf\,i}} + \eta_i \mathbf{H_{mi}}), \quad \mathbf{H_f} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{H_{fi}} + 2\eta_i \mathbf{H_{mf\,i}} + \eta_i^2 \mathbf{H_{mi}}), \quad \mathbf{H_{ct}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{H_{ct\,i}}$$

où : $\eta_i = \frac{1}{2}(z_{i+1} + z_i)$

H_{mi}, H_{fi}, H_{mfi}, $H_{\gamma i}$ représentent les matrices de membrane, de flexion, de couplage membrane flexion et de cisaillement transverse pour la couche i. On remarque l'analogie entre ces expressions avec la forme établie ci-dessus :

$$H'_{\mathbf{mf}} = H_{\mathbf{mf}} + dH_m$$
$$H'_f = H_f + 2\mathrm{dH}_{\mathbf{mf}} + d^2 H_m$$

On en déduit alors que l'excentrement pour une telle plaque est obtenu en substituant $\eta_i + d$ à η_i.

3.1.3 Énergie interne élastique de plaque

Compte tenu des remarques précédentes, l'énergie interne élastique de la plaque s'exprime plus habituellement pour ce genre de géométrie de la façon suivante :

$$\Phi_{\mathrm{int}} = \frac{1}{2}\int_S [\, e(H_m e + H'_{\mathbf{mf}}\kappa + H_{m\gamma}\gamma) + \kappa(H'_{\mathbf{mf}} e + H'_f \kappa + H'_{f\gamma}\gamma) + \gamma(H^T_{m\gamma} e + H'_{f\gamma} + H_{\mathbf{ct}}\gamma)\,]\, dS$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.1.4 Remarque

On peut choisir d'exprimer les efforts résultants de flexion ou moments par rapport au feuillet moyen de l'élément et non plus par rapport au plan de référence. Dans ce cas on obtient :

$$N=\begin{pmatrix}N_{xx}\\N_{yy}\\N_{xy}\end{pmatrix}=\int_{d-h/2}^{d+h/2}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{xy}\end{pmatrix}dz\ ,\quad M'=\begin{pmatrix}M'_{xx}\\M'_{yy}\\M'_{xy}\end{pmatrix}=\int_{d-h/2}^{d+h/2}\begin{pmatrix}\sigma_{xx}\\\sigma_{yy}\\\sigma_{xy}\end{pmatrix}(z-d)\,dz\ ,\quad T=\begin{pmatrix}T_x\\T_y\end{pmatrix}=\int_{d-h/2}^{d+h/2}\begin{pmatrix}\sigma_{xz}\\\sigma_{yz}\end{pmatrix}dz$$

et l'expression du travail des efforts intérieurs devient :

$$W_{\text{def}}=\int_S\left(e_{xx}N_{xx}+e_{yy}N_{yy}+2e_{xy}N_{xy}+\kappa_{xx}(M'_{xx}+dN_{xx})+\kappa_{yy}(M'_{yy}+dN_{yy})\right)ds+$$
$$\int_S\left(2\kappa_{xy}(M'_{xy}+dN_{xy})+\gamma_x T_x+\gamma_y T_y\right)dS$$

On en déduit alors en utilisant l'expression 3D du travail de déformation que :

$$N=H_m e+(H_{\mathbf{mf}}+dH_m)\kappa+H_{m\gamma}\gamma$$
$$M'+dN=(H_{\mathbf{mf}}+dH_m)e+(H_f+2\mathrm{dH}_{\mathbf{mf}}+d^2H_m)\kappa+(H_{f\gamma}+dH_{m\gamma})\gamma$$
$$T=H^T_{m\gamma}e+(H^T_{f\gamma}+dH^T_{m\gamma})\kappa+H_{\mathbf{ct}}\gamma$$

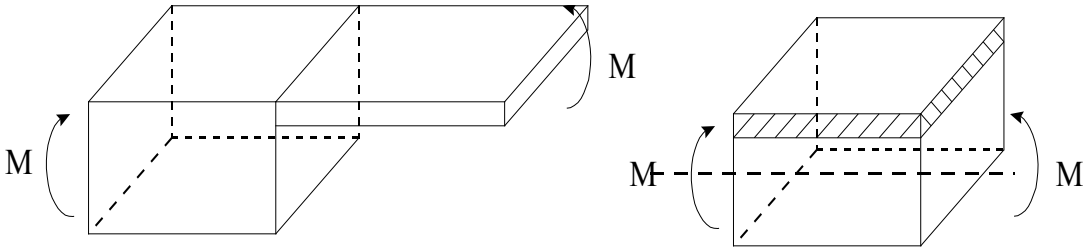
Soit encore :

$$N=H_m e+(H_{\mathbf{mf}}+dH_m)\kappa+H_{m\gamma}\gamma$$
$$M'=H_{\mathbf{mf}}e+(H_f+dH_{\mathbf{mf}})\kappa+H_{f\gamma}\gamma\ .$$
$$T=H^T_{m\gamma}e+(H^T_{f\gamma}+dH^T_{m\gamma})\kappa+H_{\mathbf{ct}}\gamma$$

L'expression de l'énergie interne de la plaque reste bien sûr inchangée quant à elle. Dans le cas de l'élasticité, elle s'écrit toujours :

$$\Phi_{\text{int}}=\frac{1}{2}\int_S[\,e(H_m e+H'_{\mathbf{mf}}\kappa+H_{m\gamma}\gamma)+\kappa(H'_{\mathbf{mf}}e+H'_f\kappa+H'_{f\gamma}\gamma)+\gamma(H^T_{m\gamma}e+H'^T_{f\gamma}\kappa+H_{\mathbf{ct}}\gamma)\,]dS$$

La question du choix du plan intéressant à utiliser pour l'expression des moments peut varier d'une situation à une autre.



Dans le cas de la figure de droite, l'approche développée ci-dessus est préférable car l'expression des chargements est définie par rapport au feuillet moyen de chaque plaque. Dans le cas de la figure de gauche, si l'on souhaite remplacer la coque multi-couche par deux coques excentrées, l'axe de référence est le feuillet moyen de la coque multi-couche. On a donc intérêt à tout définir par rapport au plan d'épure. C'est cette approche qui est retenue dans le code. Tous les chargements appliqués sont considérés comme étant définis par défaut dans le repère d'épure ou plan du maillage. Si jamais certains chargements sont définis par rapport à d'autres plans (feuillet moyen, feuillet supérieur ou inférieur) c'est à l'utilisateur de faire les changements de repère appropriés, à la main ou par le biais du fichier de commande en précisant le plan d'application des efforts quand cela est possible (voir [§5]), pour se ramener à un chargement défini dans le plan du maillage.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

3.2 Travail des forces et couples extérieurs

Le travail des forces et couples s'exerçant sur la plaque s'exprime de la manière suivante :

$$W_{\text{ext}}=\int_S \int_{d-h/2}^{d+h/2} F_v.U\,dV+\int_S F_s.U\,dS+\int_C \int_{d-h/2}^{d+h/2} F_c.U\,dz\,ds$$

où : F_v, F_s, F_c sont les efforts volumiques, surfaciques et de contour s'exerçant sur la plaque, respectivement.
C est la partie du contour de la plaque sur laquelle les efforts de contour F_c sont appliqués.

Avec la cinématique du [§2.2], on détermine ainsi :

$$W_{\text{ext}}=\int_S (f_x u+f_y v+f_z w+c_x\theta_x+c_y\theta_y)\,dS+\int_C (\varphi_x u+\varphi_y v+\varphi_z w+\chi_x\theta_x+\chi_y\theta_y)\,ds$$

$$¿\int_S (f_x u+f_y v+f_z w+c_y\beta_x-c_x\beta_y)\,dS+\int_C (\varphi_x u+\varphi_y v+\varphi_z w+\chi_y\beta_x-\chi_x\beta_y)\,ds$$

où sont présents sur la plaque :

- f_x, f_y, f_z les forces surfaciques agissant suivant x, y et z ;
- $f_i=\int_{-h/2}^{+h/2} F_v.e_i\,dz+F_s.e_i$ où e_x et e_y sont les vecteurs de base du plan tangent et e_z leur vecteur normal ;
- $\mathbf{c}_x, \mathbf{c}_y$: couples surfaciques agissant autour des axes x et y ;
- $c_i=\int_{-h/2}^{+h/2} [(z+d)e_z\wedge F_v].e_i\,dz+[(d\pm\frac{h}{2})e_z\wedge F_s].e_i$ où e_x, e_y, e_z sont les vecteurs de base précédemment définis.

et où sont présents sur le contour de la plaque :

- ϕ_x, ϕ_y, ϕ_z les forces linéiques agissant suivant x, y et z ;
- $\phi_i=\int_{-h/2}^{+h/2} F_c.e_i\,dz$ où e_x, e_y, e_z sont les vecteurs de base précédemment définis ;
- χ_x, χ_y les couples linéiques autour des axes x et y ;
- $\chi_i=\int_{-h/2}^{+h/2} [(z+d)e_z\wedge F_c].e_i\,dz$ où e_x, e_y, e_z sont les vecteurs de base précédemment définis.

Remarque :

Les moments par rapport à z sont nuls. Les efforts et les couples sont exprimés dans le repère du maillage. Tous les calculs sont faits par défaut dans le repère d'épure. Si des efforts ou des couples sont exprimés dans un autre repère (celui du feuillet moyen de la plaque par exemple) l'utilisateur devra faire les conversions à la main s'il utilise les options par défaut ou bien préciser le plan d'application des efforts (voir le paragraphe [§ 5]).

3.3 Principe du travail virtuel et équations d'équilibre

Ce paragraphe est inchangé par rapport au paragraphe [§3.3] de [R3.07.03].

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

4 Discrétisation numérique de la formulation variationnelle issue du principe du travail virtuel

4.1 Introduction

La formulation variationnelle pour l'énergie interne nous permet d'écrire :

$$\delta W_{\text{int}} = \int_S [\,\delta e\,(H_m e + H'_{\mathbf{mf}}\kappa + H_{m\gamma}\gamma) + \delta\kappa\,(H'_{\mathbf{mf}} e + H'_f \kappa + H'_{f\gamma}\gamma) + \delta\gamma\,(H^T_{m\gamma} e + H'^T_{f\gamma}\kappa + H_{\mathbf{ct}}\gamma)\,]\,dS$$

avec :

$$e = \begin{pmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{pmatrix}, \qquad \kappa = \begin{pmatrix} \beta_{x,x} \\ \beta_{y,y} \\ \beta_{x,y} + \beta_{y,x} \end{pmatrix}, \qquad \gamma = \begin{pmatrix} w_{,x} + \beta_x \\ w_{,y} + \beta_y \end{pmatrix}$$

Les cinq degrés de liberté sont les déplacements dans le plan du maillage u et v, hors plan w et les deux rotations β_x et β_y.

Les éléments DKT et DST sont des éléments isoparamétriques triangulaires. Les éléments DKQ, DSQ et Q4gamma sont des éléments isoparamétriques quadrilatéraux. Ils sont représentés ci-dessous :

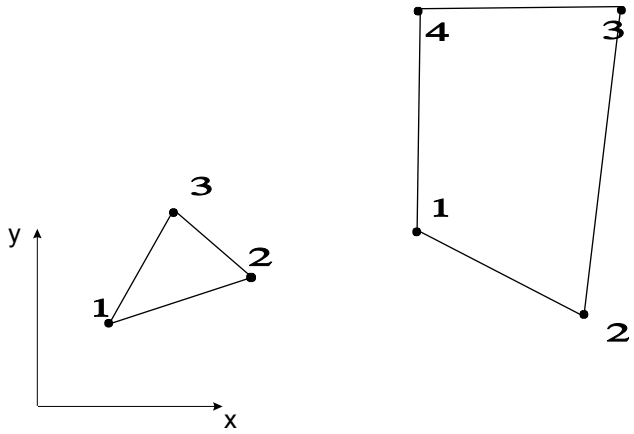


Figure 4.1-a : Éléments réels

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Les éléments de référence sont présentés ci-dessous :

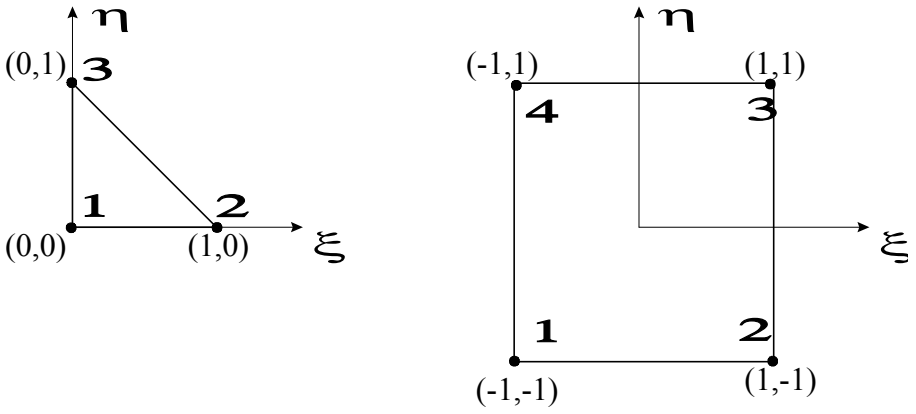


Figure 4.1-b : Éléments de référence triangle et quadrangle

On définit le repère réduit de l'élément comme le repère (ξ,η) de l'élément de référence. Le repère local de l'élément, dans le plan d'épure (x,y) est défini par l'utilisateur, par le mot-clé ANGLE_REP. La direction $X1$ de ce repère local est la projection d'une direction de référence $\underline{d}$ sur le plan de l'élément. Cette direction de référence $\underline{d}$ est choisie par l'utilisateur qui la définit par deux angles nautiques dans le repère global. La normale N au plan de l'élément ($12\wedge13$ pour un triangle numéroté 123 et $12\wedge14$ pour un quadrangle numéroté 1234) fixe la seconde direction. Le produit vectoriel des deux vecteurs précédemment définis $Y1=N\wedge X1$ permet de définir le trièdre local dans lequel seront exprimés les efforts généralisés représentant l'état de contraintes. L'utilisateur devra veiller à ce que l'axe de référence choisi ne se retrouve pas parallèle à la normale de certains éléments de plaque. Par défaut, la direction de référence $\underline{d}$ est l'axe X du repère global de définition du maillage.

Remarque :

Pour les éléments de plaque QUAD4 , l'utilisation d'un élément non coplanaire peut aboutir à des irrégularités ([bib1]). Dans ce cas, l'utilisateur est alerté.

4.2 Discrétisation du champ de déplacement

La matrice jacobienne $J(\xi,\eta)$ est :

$$\mathbf{J}=\begin{pmatrix} x_{,\xi} & y_{,\xi} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{N} N_{i,\xi}x_i & \sum_{i=1}^{N} N_{i,\xi}y_i \\ \sum_{i=1}^{N} N_{i,\eta}x_i & \sum_{i=1}^{N} N_{i,\eta}y_i \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$$

En outre :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}=\mathbf{j}\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{j}=\begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix}=\mathbf{J}^{-1}=\frac{1}{J}\begin{pmatrix} J_{22} & -J_{12} \\ -J_{21} & J_{11} \end{pmatrix} \quad \text{où } J=\det\mathbf{J}=J_{11}J_{22}-J_{12}J_{21}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Le champ de déplacement est discrétisé par :

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} N_k(\xi,\eta) \begin{pmatrix} u^k \\ v^k \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} N_k(\xi,\eta) \begin{pmatrix} w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix} + [\sum_{k=N+1}^{2N} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{xk}(\xi,\eta) \\ P_{yk}(\xi,\eta) \end{pmatrix} \alpha_k]$$

Dans cette dernière expression, le terme entre crochets est présent pour les éléments du type DKT, DST, DKQ ou DSQ, mais pas pour les éléments Q4γ.

4.3 Prise en compte de la distorsion transverse

On rappelle que la différence essentielle entre les éléments DKT, DKQ d'une part et DST, DSQ, Q4γ d'autre part vient du fait que pour les premiers la distorsion transverse est nulle soit encore $\gamma = 0$. La différence entre Q4γ et les éléments DST et DSQ vient d'un choix différent d'interpolation pour la représentation du cisaillement transverse. L'introduction de l'excentrement conduit à un traitement particulier du cisaillement transverse.

On remplace dans l'expression de l'énergie interne établie au [§4.1] γ par $\bar{\gamma}$ où les $\bar{\gamma}$ sont des déformations de substitution vérifiant $\bar{\gamma} = \gamma$ de façon faible (intégrale sur les côtés de l'élément), et telles que :

$$\mathbf{N} = \mathbf{H_m e} + \mathbf{H'_{mf}} \kappa + \mathbf{H_{m\gamma}} \bar{\gamma}$$
$$\mathbf{M} = \mathbf{H'_{mf}} \mathbf{e} + \mathbf{H'_f} \kappa + \mathbf{H'_{f\gamma}} \bar{\gamma}$$
$$\mathbf{T} = \mathbf{H^T_{m\gamma}} \mathbf{e} + \mathbf{H'^T_{f\gamma}} \kappa + \mathbf{H_{ct}} \bar{\gamma}$$

On vérifie ainsi que sur les côtés ij de l'élément, on a : $\int_i^j (\bar{\gamma}_s - \gamma_s) ds = 0$ avec $\gamma_s = w_{,s} + \beta_s$.

4.3.1 Pour les éléments Q4γ

On discrétise linéairement le champ $\bar{\gamma}$ constant par côté de telle sorte que :

$$\bar{\gamma}^{\xi} = \begin{pmatrix} \bar{\gamma}_\xi \\ \bar{\gamma}_\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-\eta}{2} \gamma_\xi^{12} + \frac{1+\eta}{2} \gamma_\xi^{34} \\ \frac{1-\xi}{2} \gamma_\eta^{23} + \frac{1-\xi}{2} \gamma_\eta^{41} \end{pmatrix}$$

En utilisant alors les relations :

$$\begin{cases} \int_{-1}^{+1} (\bar{\gamma}_\xi - (w_{,\xi} + \beta_\xi)) d\xi = 0 \ ; \\ \int_{-1}^{+1} (\bar{\gamma}_\eta - (w_{,\eta} + \beta_\eta)) d\eta = 0 \end{cases}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

on établit que :

$$\left|\begin{array}{l}\gamma_{\xi}^{ij}=\frac{1}{2}(w_j-w_i+\beta_{\xi i}+\beta_{\xi j})\\ \gamma_{\eta}^{kp}=\frac{1}{2}(w_p-w_k+\beta_{\eta p}+\beta_{\eta k})\end{array}\right. \quad \text{pour } (ij)=(12,34) \text{ et } (kp)=(23,41).$$

En reportant les deux résultats ci-dessus dans l'expression de $\bar{\gamma}^{\xi}$, on établit que :

$$\bar{\gamma}^{\xi}=\begin{pmatrix}\bar{\gamma}_{\xi}\\ \bar{\gamma}_{\eta}\end{pmatrix}=\mathbf{B}'_{\xi}\mathbf{u}_{\xi}$$

où : $\mathbf{u}_{\xi}=\begin{pmatrix}w_1\\ \beta_{\xi 1}\\ \beta_{\eta 1}\\ \vdots\\ w_N\\ \beta_{\xi N}\\ \beta_{\xi N}\end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}'_{\xi}=(\mathbf{B}'_{\xi 1},\cdots,\mathbf{B}'_{\xi N})$ avec $\mathbf{B}'_{\xi k}=\begin{pmatrix}N_{k,\xi} & \xi_k N_{k,\xi} & 0\\ N_{k,\eta} & 0 & \eta_k N_{k,\eta}\end{pmatrix}$

De plus, comme :

$$\begin{pmatrix}\beta_{\xi i}\\ \beta_{\eta i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}J_{11} & J_{12}\\ J_{21} & J_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\beta_{xi}\\ \beta_{yi}\end{pmatrix}$$

on en déduit que

$$\bar{\gamma}^{\xi}=\mathbf{B}_{\xi}\mathbf{u}_f$$

où : $\mathbf{u}_f=\begin{pmatrix}w_1\\ \beta_{x1}\\ \beta_{y1}\\ \vdots\\ w_N\\ \beta_{xN}\\ \beta_{yN}\end{pmatrix}$ et $\mathbf{B}_{\xi}=(\mathbf{B}_{\xi 1},\cdots,\mathbf{B}_{\xi N})$

avec : $\mathbf{B}_{\xi k}=\begin{pmatrix}N_{k,\xi} & \xi_k N_{k,\xi}J_{11} & \xi_k N_{k,\xi}J_{12}\\ N_{k,\eta} & \eta_k N_{k,\eta}J_{21} & \eta_k N_{k,\eta}J_{22}\end{pmatrix}$

Finalement :

$$\bar{\gamma}=\begin{pmatrix}\bar{\gamma}_x\\ \bar{\gamma}_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}j_{11} & j_{12}\\ j_{21} & j_{22}\end{pmatrix}\bar{\gamma}^{\xi}=\mathbf{B}_c\mathbf{u}_f \quad \text{avec} \quad \mathbf{B}_{c[2\times 3N]}=\mathbf{j}\mathbf{B}_{\xi}$$

Remarque :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Ce traitement est équivalent à celui des éléments Q4 γ non excentrés du [§4.3.2.1] de [R3.07.03].

4.3.2 Pour les éléments du type DKT,DST,DKQ,DSQ

En ce qui concerne les distorsions transverses, on sait que :

$$T_x = M_{xx,x} + M_{xy,y} \text{ et } T_y = M_{yy,y} + M_{xy,x} \text{ avec } \mathbf{M} = \mathbf{H'_{mf}}\mathbf{e} + \mathbf{H'_f}\kappa + \mathbf{H'_{f\gamma}}\bar{\gamma}$$

On en déduit que :

$$\mathbf{T} = \overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{m}}\mathbf{u}_{,xx} + \overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{f}}\boldsymbol{\beta}_{,xx}$$

Calcul de : $\overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{m}}\overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{f}}$

où : $\boldsymbol{\beta}^T_{,xx} = \left(\beta_{x,xx} \quad \beta_{x,yy} \quad \beta_{x,xy} \quad \beta_{y,xx} \quad \beta_{y,yy} \quad \beta_{y,xy}\right)$

$\mathbf{u}^T_{,xx} = \left(u_{,xx} \quad u_{,yy} \quad u_{,xy} \quad v_{,xx} \quad v_{,yy} \quad v_{,xy}\right)$

avec : $\overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} H^{mf}_{11} & H^{mf}_{33} & 2H^{mf}_{13} & H^{mf}_{13} & H^{mf}_{23} & H^{mf}_{12}+H^{mf}_{33} \\ H^{mf}_{13} & H^{mf}_{23} & H^{mf}_{12}+H^{mf}_{33} & H^{mf}_{33} & H^{mf}_{22} & 2H^{mf}_{23} \end{pmatrix}$

$$\overline{\mathbf{H}}^c_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} H^{f}_{11} & H^{f}_{33} & 2H^{f}_{13} & H^{f}_{13} & H^{f}_{23} & H^{f}_{12}+H^{f}_{33} \\ H^{f}_{13} & H^{f}_{23} & H^{f}_{12}+H^{f}_{33} & H^{f}_{33} & H^{f}_{22} & 2H^{f}_{23} \end{pmatrix}$$

où les H^{mf}_{ij} sont les termes (i,j) de $\mathbf{H'_{mf}}$ et où les H^{f}_{ij} sont les termes (i,j) de $\mathbf{H'_f}$.

Comme :

$$\beta_{x,xx} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xx}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{xk,xx}(\xi,\eta)\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xx}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{11}^2 P_{xk,\xi\xi} + 2j_{11}j_{12}P_{xk,\xi\eta} + j_{12}^2 P_{xk,\eta\eta})\alpha_k$$

$$\beta_{x,yy} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,yy}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{xk,yy}(\xi,\eta)\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} N_{k,yy}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{21}^2 P_{xk,\xi\xi} + 2j_{21}j_{22}P_{xk,\xi\eta} + j_{22}^2 P_{xk,\eta\eta})\alpha_k$$

$$\beta_{x,xy} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xy}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{xk,xy}(\xi,\eta)\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xy}(\xi,\eta)\beta_{xk} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{11}j_{21}P_{xk,\xi\xi} + [j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]P_{xk,\xi\eta} + j_{11}j_{21}P_{xk,\eta\eta})\alpha_k$$

$$\beta_{y,xx} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xx}(\xi,\eta)\beta_{yk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{yk,xx}(\xi,\eta)\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xx}(\xi,\eta)\beta_{yk} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{11}^2 P_{yk,\xi\xi} + 2j_{11}j_{12}P_{yk,\xi\eta} + j_{12}^2 P_{yk,\eta\eta})\alpha_k$$

$$\beta_{y,yy} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,yy}(\xi,\eta)\beta_{yk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{yk,yy}(\xi,\eta)\alpha_k = \sum_{k=1}^{N} N_{k,yy}(\xi,\eta)\beta_{yk} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{21}^2 P_{yk,\xi\xi} + 2j_{21}j_{22}P_{yk,\xi\eta} + j_{22}^2 P_{yk,\eta\eta})\alpha_k$$

$$\beta_{y,xy} = \sum_{k=1}^{N} N_{k,xy}(\xi,\eta)\beta_{yk} + \sum_{k=N+1}^{2N} P_{yk,xy}(\xi,\eta)\alpha_k = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} N_{k,xy}(\xi,\eta)\beta_{yk}}_{\beta^1_{,xx}} + \sum_{k=N+1}^{2N} (j_{11}j_{21}P_{yk,\xi\xi} + [j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]P_{yk,\xi\eta} + j_{11}j_{21}P_{yk,\eta\eta})\alpha_k$$

avec :

$$\beta^1_{,xx} = \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & j_{11}^2 N_{k,\xi\xi} + 2j_{11}j_{12}N_{k,\xi\eta} + j_{12}^2 N_{k,\eta\eta} & 0 \\ 0 & j_{21}^2 N_{k,\xi\xi} + 2j_{21}j_{22}N_{k,\xi\eta} + j_{22}^2 N_{k,\eta\eta} & 0 \\ 0 & j_{11}j_{21}N_{k,\xi\xi} + [j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]N_{k,\xi\eta} + j_{12}j_{22}N_{k,\eta\eta} & 0 \\ 0 & 0 & j_{11}^2 N_{k,\xi\xi} + 2j_{11}j_{12}N_{k,\xi\eta} + j_{12}^2 N_{k,\eta\eta} \\ 0 & 0 & j_{21}^2 N_{k,\xi\xi} + 2j_{21}j_{22}N_{k,\xi\eta} + j_{22}^2 N_{k,\eta\eta} \\ 0 & 0 & j_{11}j_{21}N_{k,\xi\xi} + [j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]N_{k,\xi\eta} + j_{12}j_{22}N_{k,\eta\eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

la première contribution à $\beta_{,xx}$ dans l'expression ci-dessus et :

$$u_{,xx}=\sum_{k=1}^{n}\begin{pmatrix} j_{11}^2 N_{k,\xi\xi}+2j_{11}j_{12}N_{k,\xi\eta}+j_{12}^2 N_{k,\eta\eta} & 0 \\ j_{21}^2 N_{k,\xi\xi}+2j_{21}j_{22}N_{k,\xi\eta}+j_{22}^2 N_{k,\eta\eta} & 0 \\ j_{11}j_{21}N_{k,\xi\xi}+[j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]N_{k,\xi\eta}+j_{12}j_{22}N_{k,\eta\eta} & 0 \\ 0 & j_{11}^2 N_{k,\xi\xi}+2j_{11}j_{12}N_{k,\xi\eta}+j_{12}^2 N_{k,\eta\eta} \\ 0 & j_{21}^2 N_{k,\xi\xi}+2j_{21}j_{22}N_{k,\xi\eta}+j_{22}^2 N_{k,\eta\eta} \\ 0 & j_{11}j_{21}N_{k,\xi\xi}+[j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]N_{k,\xi\eta}+j_{12}j_{22}N_{k,\eta\eta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}$$

soit encore sous forme matricielle que :

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{H}}_m^c\begin{pmatrix} u_{,xx} \\ u_{,yy} \\ u_{,xy} \\ v_{,xx} \\ v_{,yy} \\ v_{,xy} \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\begin{pmatrix} \beta_{x,xx} \\ \beta_{x,yy} \\ \beta_{x,xy} \\ \beta_{y,xx} \\ \beta_{y,yy} \\ \beta_{y,xy} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{H}}_m^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{cm}^k}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{c\beta}^k}\begin{pmatrix} w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\sum_{k=N+1}^{2N}\alpha_k\begin{pmatrix} C_k(j_{11}^2 P_{k,\xi\xi}+2j_{11}j_{12}P_{k,\xi\eta}+j_{12}^2 P_{k,\eta\eta}) \\ C_k(j_{21}^2 P_{k,\xi\xi}+2j_{21}j_{22}P_{k,\xi\eta}+j_{22}^2 P_{k,\eta\eta}) \\ C_k(j_{11}j_{21}P_{k,\xi\xi}+[j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]P_{k,\xi\eta}+j_{11}j_{21}P_{k,\eta\eta}) \\ S_k(j_{11}^2 P_{k,\xi\xi}+2j_{11}j_{12}P_{k,\xi\eta}+j_{12}^2 P_{k,\eta\eta}) \\ S_k(j_{21}^2 P_{k,\xi\xi}+2j_{21}j_{22}P_{k,\xi\eta}+j_{22}^2 P_{k,\eta\eta}) \\ S_k(j_{11}j_{21}P_{k,\xi\xi}+[j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21}]P_{k,\xi\eta}+j_{11}j_{21}P_{k,\eta\eta}) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{H}}_m^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{cm}^k}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{c\beta}^k}\begin{pmatrix} w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}+\sum_{k=N+1}^{2N}\bar{\mathbf{H}}_f^c T_2\begin{pmatrix} C_k P_{k,\xi\xi} \\ C_k P_{k,\eta\eta} \\ C_k P_{k,\xi\eta} \\ S_k P_{k,\xi\xi} \\ S_k P_{k,\eta\eta} \\ S_k P_{k,\xi\eta} \end{pmatrix}\alpha_k$$

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{H}}_m^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{cm}^k}\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\sum_{k=1}^{N}\mathbf{P_{c\beta}^k}\begin{pmatrix} w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\mathbf{T_2}\sum_{k=N+1}^{2N}\mathbf{T_{ck}}\alpha_k$$

$$\mathbf{T}=\bar{\mathbf{H}}_m^c\mathbf{P_{cm}}\mathbf{U_m}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\mathbf{P_{c\beta}}\mathbf{U_{f\beta}}+\bar{\mathbf{H}}_f^c\mathbf{T_2}\mathbf{T_\alpha}\alpha=\mathbf{B_{cm}}\mathbf{U_m}+\mathbf{B_{c\beta}}\mathbf{U_{f\beta}}+\mathbf{B_{c\alpha}}\alpha$$

Où :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{U}_m = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{T}_\alpha = (\mathbf{T}_{c(N+1)} \cdots \mathbf{T}_{c2N})$$

$$\mathbf{T}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_2 & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} j_{11}^2 & j_{12}^2 & 2j_{11}j_{12} \\ j_{21}^2 & j_{22}^2 & 2j_{21}j_{22} \\ j_{11}j_{21} & j_{12}j_{22} & j_{11}j_{22}+j_{12}j_{21} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_{f\beta} = \begin{pmatrix} \mathrm{w}_1 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \vdots \\ \mathrm{w}_N \\ \beta_{xN} \\ \beta_{yN} \end{pmatrix}$$

On peut aussi écrire :

$$\mathbf{T} = \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{m}}^{\mathrm{c}} \mathbf{u}_{,xx} + \overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{f}}^{\mathrm{c}} \beta_{,xx} = \mathbf{B}_{\mathbf{cm}} \mathbf{U}_{\mathbf{m}} + \mathbf{B}_{\mathbf{c}\beta} \mathbf{U}_{\mathbf{f}\beta} + \mathbf{B}_{\mathbf{c}\alpha} \boldsymbol{\alpha}$$

En utilisant la relation $\int_i^j (\bar{\gamma}_s - \gamma_s) ds = 0$ avec $\gamma_s = \mathrm{w}_{,s} + \beta_s$ pour chacun des côtés ij de l'élément, on peut obtenir les α_k puisque cette relation s'écrit encore :

$$\mathrm{w}_j - \mathrm{w}_i + \frac{\mathrm{L}_k}{2}(\mathrm{C}_k \beta_{xi} + \mathrm{S}_k \beta_{yi} + \mathrm{C}_k \beta_{xj} + \mathrm{S}_k \beta_{yj}) + \frac{2}{3}\mathrm{L}_k \alpha_k = \mathrm{L}_k \bar{\gamma}_{sk}$$

où :

$$\bar{\gamma}_{sk} = \begin{pmatrix} \mathrm{C}_k & S_k \end{pmatrix} \bar{\gamma} = (\mathrm{C}_k \ \ \mathrm{S}_k) H_{ct}^{-1} \left[T - H_{m\gamma}^T e - H'^T_{f\gamma} \kappa \right]$$
$$= (\mathrm{C}_k \ \ S_k) H_{ct}^{-1} \left[\left(B_{cm} - H_{m\gamma}{}^T B_m \right) U_m + \left(B_{c\beta} - H'_{f\gamma}{}^T B_{f\beta} \right) U_{f\beta} + \left(B_{c\alpha} - H'^T_{f\gamma} B_{f\alpha} \right) \alpha \right]$$

La relation ci-dessus s'écrit encore sous forme matricielle :

$$\mathbf{A}_\alpha \boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{A}_w + \mathbf{A}_\beta) \mathbf{U}_{\mathbf{f}\beta} + \mathbf{A}_{\mathbf{m}} \mathbf{U}_{\mathbf{m}}$$

avec :

$$\mathbf{A}_{\boldsymbol{\alpha}} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} L_{N+1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & L_{2N} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L_{N+1} C_{N+1} & L_{N+1} S_{N+1} \\ \vdots & \vdots \\ L_{2N} C_{2N} & L_{2N} S_{2N} \end{pmatrix} \mathbf{H}_{\boldsymbol{ct}}^{-1} (\mathbf{B}_{\mathbf{c}\boldsymbol{\alpha}} - \mathbf{H}'_{f\gamma}{}^T \mathbf{B}_{\mathbf{f}\boldsymbol{\alpha}})$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$A_w=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & L_{N+1}C_{N+1} & L_{N+1}S_{N+1} & 2 & L_{N+1}C_{N+1} & L_{N+1}S_{N+1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & L_{k+1}C_{k+1} & L_{k+1}S_{k+1} & 2 & L_{k+1}C_{k+1} & L_{k+1}S_{k+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & L_{2N-1}C_{2N-1} & L_{2N-1}S_{2N-1} & 2 & L_{2N-1}C_{2N-1} & L_{2N-1}S_{2N-1} \\ 2 & L_{2N}C_{2N} & L_{2N}S_{2N} & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & -2 & L_{2N}C_{2N} & L_{2N}S_{2N} \end{pmatrix}$$

$$A_\beta=\begin{pmatrix} L_{N+1}C_{N+1} & L_{N+1}S_{N+1} \\ \vdots & \vdots \\ L_{2N}C_{2N} & L_{2N}S_{2N} \end{pmatrix}\mathbf{H}_{ct}^{-1}(\mathbf{B}_{c\beta}-\mathbf{H}'^{T}_{f\gamma}\mathbf{B}_{f\beta})$$

$$\mathbf{A}_m=\begin{pmatrix} L_{N+1}C_{N+1} & L_{N+1}S_{N+1} \\ \vdots & \vdots \\ L_{2N}C_{2N} & L_{2N}S_{2N} \end{pmatrix}\mathbf{H}_{ct}^{-1}(\mathbf{B}_{cm}-\mathbf{H}_{m\gamma}^{T}\mathbf{B}_m)$$

Ainsi :

$$\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{P}_\beta\mathbf{U}_{f\beta}+\mathbf{P}_m\mathbf{U}_m$$

avec :

$$\mathbf{P}_\beta=\mathbf{A}_\alpha^{-1}(\mathbf{A}_w+\mathbf{A}_\beta)$$

$$\mathbf{P}_m=\mathbf{A}_\alpha^{-1}\mathbf{A}_m$$

ce qui implique :

$$\mathbf{T}=(\mathbf{B}_{cm}+\mathbf{B}_{c\alpha}\mathbf{P}_m)\mathbf{U}_m+(\mathbf{B}_{c\beta}+\mathbf{B}_{c\alpha}\mathbf{P}_\beta)\mathbf{U}_{f\beta}$$

Remarques :

Pour les éléments du type DKT et DST , on a $\mathbf{B}_{cm}=\mathbf{B}_{c\beta}=0$. Il en résulte des expressions simplifiées des équations précédentes.

4.4 Matrice de rigidité élémentaire

4.4.1 Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments Q4γ

On reprend les expressions des matrices de rigidité données au [§4.4.1] de la documentation de référence [R3.07.03] et on remplace H_{mf} par H'_{mf} , H_f par H'_f et $H_{f\gamma}$ par $H'_{f\gamma}$. On notera que dans [R3.07.03] les résultats étaient présentés sans terme de couplage membrane cisaillement transverse ou flexion cisaillement transverse. On les rajoute ici.

4.4.2 Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments DKT, DKQ

On reprend les expressions des matrices de rigidité données au [§4.4.1] de la documentation de référence [R3.07.03] et on remplace H_{mf} par H'_{mf} , H_f par H'_f . Puisque la relation $\bar{\gamma}=0$ est satisfaite les couplages membrane cisaillement transverse ou flexion cisaillement transverse sont inexistants.

4.4.3 Matrice de rigidité élémentaire pour les éléments DST, DSQ

On a :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\delta W_{\text{int}}^{e}=\int_{e}\delta\mathbf{e}\left(\mathbf{H}_{\mathbf{m}}\mathbf{e}+\mathbf{H}_{mf}^{'}\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{T}\right)+\delta\boldsymbol{\kappa}\left(\mathbf{H}_{mf}^{'}\mathbf{e}+\mathbf{H}_{\mathbf{f}}^{'}\boldsymbol{\kappa}+\mathbf{H}_{\mathbf{f}\gamma}^{'}\boldsymbol{\gamma}-\mathbf{H}_{\mathbf{f}\gamma}^{'}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{T}\right)+\delta\mathbf{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{T}\,dS=$$
$$\int_{e}\delta\mathbf{e}\left(\left[\mathbf{H}_{\mathbf{m}}-\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}^{\mathbf{T}}\right]\mathbf{e}+\left[\mathbf{H}_{mf}^{'}-\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{H}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{f}\gamma}\right]\boldsymbol{\kappa}\right)+\delta\boldsymbol{\kappa}\left(\left[\mathbf{H}'_{mf}-\mathbf{H}_{\mathbf{f}\gamma}^{'}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}^{\mathbf{T}}\right]\mathbf{e}\,dS\right.$$
$$\left.+\int_{e}\left[\mathbf{H}_{\mathbf{f}}^{'}-\mathbf{H}_{\mathbf{f}\gamma}^{'}\mathbf{H}_{ct-1}\mathbf{H}'^{\mathbf{T}}_{\mathbf{f}\gamma}\right]\boldsymbol{\kappa}\right)+\delta\mathbf{T}\mathbf{H}_{ct-1}\mathbf{T}\,dS$$

Soit encore :

$$\delta W_{\text{int}}^{\text{e}}=\int_{\text{e}}\delta\mathbf{e}\left(\mathbf{H}''_{\text{m}}\mathbf{e}+\mathbf{H}''_{\text{mf}}\boldsymbol{\kappa}\right)+\delta\boldsymbol{\kappa}\left(\mathbf{H}''^{\text{T}}_{\text{mf}}\mathbf{e}+\mathbf{H}''_{\text{f}}\boldsymbol{\kappa}\right)+\delta\mathbf{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{T}\text{dS}$$

où :

$$\mathbf{H}''_{\mathbf{m}}=\mathbf{H}_{\mathbf{m}}-\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}^{\text{T}}$$
$$\mathbf{H}''_{\mathbf{mf}}=\mathbf{H}'_{\mathbf{mf}}-\mathbf{H}_{\mathbf{m}\gamma}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{H}'^{\text{T}}_{\mathbf{f}\gamma}$$
$$\mathbf{H}''_{\mathbf{f}}=\mathbf{H}'_{\mathbf{f}}-\mathbf{H}'_{\mathbf{f}\gamma}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{H}'^{\text{T}}_{\mathbf{f}\gamma}$$

D'où :

$$\delta W_{\text{int}}^{e}=\int_{e}(\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{B}_{m}^{T}\mathbf{H}_{m}^{''}\mathbf{B}_{m}\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{B}_{m}^{T}\mathbf{H}_{mf}^{''}\mathbf{B}_{f}\mathbf{U}_{f}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\mathbf{B}_{f}^{T}\mathbf{H}_{mf}^{''T}\mathbf{B}_{m}\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\mathbf{B}_{f}^{T}\mathbf{H}_{f}^{''}\mathbf{B}_{f}\mathbf{U}_{f}$$
$$+\delta\alpha^{T}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}\alpha+\delta\alpha^{T}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{cm}\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{B}_{cm}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}\alpha+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{B}_{cm}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{cm}\mathbf{U}_{m}$$
$$+\delta\alpha^{T}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}\alpha+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}\mathbf{U}_{f\beta}$$
$$+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{B}_{cm}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{cm}\mathbf{U}_{m})\,dS$$

$$=\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{m}^{T}\mathbf{H}''_{m}\mathbf{B}_{m}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{f}^{T}\mathbf{H}''_{f}\mathbf{B}_{f}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{f}$$
$$+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}(\int_{e}\mathbf{B}_{m}^{T}\mathbf{H}''_{\text{mf}}\mathbf{B}_{f}\text{dS})\mathbf{U}_{f}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{f}^{T}\mathbf{H}''^{T}_{\text{mf}}\mathbf{B}_{m}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{m}$$
$$+\delta\alpha^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}\text{dS}\right)\alpha+\delta\alpha^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{cm}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{\mathbf{m}}$$
$$+\delta\mathbf{U}_{¿m}^{T}(\int_{e}\mathbf{B}_{cm}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}dS)\alpha+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{\text{cm}}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{\text{cm}}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{m}$$
$$+\delta\alpha^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{c\alpha}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{c\alpha}\text{dS}\right)\alpha$$
$$+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\left(\int_{e}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}\text{dS}\right)\mathbf{U}_{f\beta}$$
$$+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}(\int_{e}\mathbf{B}_{cm}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{c\beta}dS)\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}(\int_{e}\mathbf{B}_{c\beta}^{T}\mathbf{H}_{ct}^{-1}\mathbf{B}_{cm}dS)\mathbf{U}_{m}$$
$$=\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{K}_{m}\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\mathbf{K}_{f}\mathbf{U}_{f}+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{K}_{mf}\mathbf{U}_{f}+\delta\mathbf{U}_{f}^{T}\mathbf{K}_{fm}\mathbf{U}_{m}+\delta\alpha^{T}\mathbf{K}_{\alpha\alpha}\alpha+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{K}_{m\alpha}\alpha+\delta\alpha^{T}\mathbf{K}_{m\alpha}^{T}\mathbf{U}_{m}$$
$$+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{K}_{\beta\alpha}\alpha+\delta\alpha^{T}\mathbf{K}_{\beta\alpha}^{T}\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{m}^{T}\mathbf{K}_{m\beta}\mathbf{U}_{f\beta}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{K}_{\beta m}\mathbf{U}_{m}+\delta\mathbf{U}_{f\beta}^{T}\mathbf{K}_{\beta\beta}\mathbf{U}_{f\beta}$$

avec :

$$\mathbf{K}_{\text{m}}=\int_{\text{s}}[\mathbf{B}_{\text{m}}^{\text{T}}\mathbf{H}''_{\text{m}}\mathbf{B}_{\text{m}}+\mathbf{B}_{\text{cm}}^{\text{T}}\mathbf{H}_{\text{ct}}^{-1}\mathbf{B}_{\text{cm}}]\text{dS}$$

On sait aussi que $\mathbf{U}_{\text{f}}=(\mathbf{U}_{\text{f}\beta},\alpha)$ d'où il résulte que :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\mathbf{K}_f = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{f11} & \mathbf{K}_{f12} \\ \mathbf{K}_{f12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \left| \begin{array}{l} \mathbf{K}_{f11} = \int_s \mathbf{B}_{f\beta}^T \mathbf{H}_f'' \mathbf{B}_{f\beta} dS \\ \mathbf{K}_{f12} = \int_s \mathbf{B}_{f\beta}^T \mathbf{H}_f'' \mathbf{B}_{f\alpha} dS \\ \mathbf{K}_{f22} = \int_s \mathbf{B}_{f\alpha}^T \mathbf{H}_f'' \mathbf{B}_{f\alpha} dS \end{array} \right.$$

$$K_{mf} = \begin{pmatrix} K_{mf11} & K_{mf12} \end{pmatrix} \quad \text{avec :} \quad \left| \begin{array}{l} K_{mf11} = \int_s B_m^T H_{mf}'' B_{f\beta} dS \\ K_{mf12} = \int_s B_m^T H_{mf}'' B_{f\alpha} dS \end{array} \right.$$

$$K_{fm} = K_{mf}^T$$

Utilisant le fait que $\alpha = P_\beta U_{f\beta} + P_m U_m$ on en déduit que :

$$\delta W_{\text{int}} = \delta U_m^T K_m' U_m + \delta U_{f\beta}^T K_f' U_{f\beta} + \delta U_m^T K_{mf}' U_{f\beta} + \delta U_{f\beta}^T K_{fm}' U_m$$

où :

$$K_m' = K_m + P_m^T (K_{f22} + K_{\alpha\alpha}) P_m + (K_{mf12} + K_{m\alpha}) P_m + P_m^T (K_{mf12}^T + K_{m\alpha}^T)$$
$$K_f' = K_{f11} + K_{\beta\beta} + P_\beta^T (K_{f22} + K_{\alpha\alpha}) P_\beta + (K_{f12} + K_{\beta\alpha}) P_\beta + P_\beta^T (K_{f12}^T + K_{\beta\alpha}^T)$$
$$K_{mf}' = K_{mf11} + K_{m\beta} + (K_{mf12} + K_{m\alpha}) P_\beta + P_m^T (K_{f12}^T + K_{\beta\alpha}^T) + P_m^T (K_{f22} + K_{\alpha\alpha}) P_\beta$$ ¿
T
$$K_{fm}' = K_{mf}$$ ¿

Ceci s'écrit encore :

$$\delta W_{\text{int}}^e = \begin{pmatrix} \delta U_m, \delta U_{f\beta} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} U_m \\ U_{f\beta} \end{pmatrix}$$

où : $\mathbf{K}_{[5N\times5N]} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{m[2N\times2N]}' & \mathbf{K}_{mf[2N\times3N]}' \\ \mathbf{K}_{mf[3N\times2N]}'^T & \mathbf{K}_{f[3N\times3N]}' \end{pmatrix}$ est la matrice de rigidité élémentaire pour un élément de plaque excentré DST.

4.5 Matrice de masse élémentaire

Les termes de la matrice de masse sont obtenus après discrétisation de la formulation variationnelle suivante :

$$\delta W_{mass}^{ac} = \int_{d-h/2}^{d+h/2} \int_S \rho \ddot{u} \delta u \, dz dS$$
$$= \int_S \rho_m (\ddot{u}\delta u + \ddot{v}\delta v + \ddot{w}\delta w) + (\rho_{mf} + d\rho_m)(\ddot{u}\delta\beta_x + \ddot{v}\delta\beta_y + \ddot{\beta}_x \delta u + \ddot{\beta}_y \delta v) dS +$$
$$\int_S (\rho_f + 2d\rho_{mf} + d^2\rho_m)(\ddot{\beta}_x \delta\beta_x + \ddot{\beta}_y \delta\beta_y) dS$$

¿

avec $\rho_m = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho \, dz$, $\rho_{mf} = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho z dz$, et $\rho_f = \int_{-h/2}^{+h/2} \rho z^2 dz$.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Remarque :

Si la plaque est homogène ou symétrique par rapport à son feuillet moyen alors $\rho_{mf}=0$.

4.5.1 Matrice de masse élémentaire classique

4.5.1.1 Élément Q4gamma

La discrétisation du déplacement pour cet élément isoparamétrique est :

$$\mathbf{u}=\sum_{k=1}^{N}\mathbf{N_k}\left\{\begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}\right\} k=1,\ldots,N$$

La matrice de masse, dans la base où les degrés de liberté sont regroupés suivant les directions de translation et de rotation, a alors pour expression :

$$M=\begin{pmatrix} M_m & 0 & 0 & M_{mf} & 0 \\ 0 & M_m & 0 & 0 & M_{mf} \\ 0 & 0 & M_m & 0 & 0 \\ M_{mf}^T & 0 & 0 & M_f & 0 \\ 0 & M_{mf}^T & 0 & 0 & M_f \end{pmatrix}$$

avec : $M_m=\int_S \rho_m N^T N\, dS$

$$M_{mf}=\int_S (\rho_{mf}+d\rho_m) N^T N\, dS$$

$$M_f=\int_S (\rho_f+2\mathrm{d}\rho_{mf}+d^2\rho_m) N^T N\, dS$$

où : $N=\left(N_1 \ln_k\right)$.

Pour la suite, on pose $\rho'_{mf}=\rho_{mf}+d\rho_m$ et $\rho'_f=\rho_f+2\mathrm{d}\rho_{mf}+d^2\rho_m$.

4.5.1.2 Éléments du type DKT, DST

Comme :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{w} \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{N}\mathrm{N_k}(\xi,\eta)\begin{pmatrix} \mathrm{w_k} \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}+\sum_{k=N+1}^{2N}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{P_{xk}}(\xi,\eta) \\ \mathrm{P_{yk}}(\xi,\eta) \end{pmatrix}\alpha_k$$

où : $\alpha=P_m U_m+P_\beta U_{f\beta}$

on en déduit que :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{pmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_k(\xi,\eta) & 0 & 0 \\ N_{kxu}(\xi,\eta) & N_{kxv}(\xi,\eta) & N_{kxw}(\xi,\eta) & N_{kxx}(\xi,\eta) & N_{kxy}(\xi,\eta) \\ N_{kyu}(\xi,\eta) & N_{kyv}(\xi,\eta) & N_{kyw}(\xi,\eta) & N_{kyx}(\xi,\eta) & N_{kyy}(\xi,\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}.$$

La matrice de masse a alors pour expression :

$$M = \begin{pmatrix} M'_m & M'_{mf} \\ M'_{fm} & M'_f \end{pmatrix}$$

La partie membrane M'_m de la matrice élémentaire de masse se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_k N_p & 0 \\ 0 & N_k N_p \end{pmatrix} + \rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_k N_{pxu} + N_{kxu} N_p & N_k N_{pxv} + N_{kyu} N_p \\ N_k N_{pyu} + N_{kxv} N_p & N_k N_{pyv} + N_{kyv} N_p \end{pmatrix}$$
$$+ \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxu} N_{pxu} + N_{kyu} N_{pyu} & N_{kxu} N_{pxv} + N_{kyu} N_{pyv} \\ N_{pxu} N_{kxv} + N_{pyu} N_{kyv} & N_{kxv} N_{pxv} + N_{kyv} N_{pyv} \end{pmatrix}$$

La partie flexion M'_f se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_k N_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxw} N_{pxw} + N_{kyw} N_{pyw} & N_{kxw} N_{pxx} + N_{kyw} N_{pyx} & N_{kxw} N_{pxy} + N_{kyw} N_{pyy} \\ N_{kxx} N_{pxw} + N_{kyx} N_{pyw} & N_{kxx} N_{pxx} + N_{kyx} N_{pyx} & N_{kxx} N_{pxy} + N_{kyx} N_{pyy} \\ N_{kxy} N_{pxw} + N_{kyy} N_{pyw} & N_{kxy} N_{pxx} + N_{kyy} N_{pyx} & N_{kxy} N_{pxy} + N_{kyy} N_{pyy} \end{pmatrix}$$

La partie couplage entre la membrane et la flexion M'_{mf} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_k N_{pxw} & N_k N_{pxx} & N_k N_{pxy} \\ N_k N_{pyw} & N_k N_{pyx} & N_k N_{pyy} \end{pmatrix} +$$
$$\rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxu} N_{pxw} + N_{kyu} N_{pyw} & N_{kxu} N_{pxx} + N_{kyu} N_{pyx} & N_{kxu} N_{pxy} + N_{kyu} N_{pyy} \\ N_{kxv} N_{pxw} + N_{kyv} N_{pyw} & N_{kxv} N_{pxx} + N_{kyv} N_{pyx} & N_{kxv} N_{pxy} + N_{kyv} N_{pyy} \end{pmatrix}$$

La partie couplage entre la flexion et la membrane M'_{fm} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_{kxw} N_p & N_{kyw} N_p \\ N_{kxx} N_p & N_{kyx} N_p \\ N_{kxy} N_p & N_{kyy} N_p \end{pmatrix} + \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxw} N_{pxu} + N_{kyw} N_{pyu} & N_{kxw} N_{pxv} + N_{kyw} N_{pyv} \\ N_{kxx} N_{pxu} + N_{kyx} N_{pyu} & N_{kxx} N_{pxv} + N_{kyx} N_{pyv} \\ N_{kxy} N_{pxu} + N_{kyy} N_{pyu} & N_{kxy} N_{pxv} + N_{kyy} N_{pyv} \end{pmatrix}$$

4.5.2 Matrice de masse élémentaire améliorée

Comme la flèche d'une plaque en flexion uniquement peut difficilement être représentée par une approximation linéaire, on peut enrichir les fonctions de forme pour les termes de flexion. Cette

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

approche est utilisée dans *Code_Aster* pour les éléments du type DKT, DST et Q4G où les fonctions de forme utilisées dans le calcul de la matrice de masse de flexion sont d'ordre 3. L'interpolation pour w s'écrit ainsi :

$$w = \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) w_k + N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) w_{,\xi k} + N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) w_{,\eta k}$$

4.5.2.1 Éléments du type DKT

On sait que dans l'approximation de Love-Kirchhoff on a $\beta_x = -w_{,x}$ et $\beta_y = -w_{,y}$ en tout point de l'élément.
Du fait de la discrétisation énoncée ci-dessus on a :

$$w = \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) w_k + (J_{11} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) + J_{21} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)) w_{,xk} + (J_{12} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) + J_{22} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)) w_{,yk}$$

puisque :

$$\begin{pmatrix} w_{,\xi k} \\ w_{,\eta k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{,xk} \\ w_{,yk} \end{pmatrix}$$

Ceci s'écrit encore :

$$\begin{aligned} w &= \sum_{k=1}^{N} N'_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) w_k + N'_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) \beta_{xk} + N'_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \beta_{yk} \\ &= \sum_{k=1}^{N} N_{kww}(\xi,\eta) w_k + N_{kwx}(\xi,\eta) \beta_{xk} + N_{kwy}(\xi,\eta) \beta_{yk} \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} N'_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) &= N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) \\ N'_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) &= -J_{11} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) - J_{21} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \\ N'_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) &= -J_{12} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) - J_{22} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \end{aligned} .$$

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{kww}(\xi,\eta) & N_{kwx}(\xi,\eta) & N_{kwy}(\xi,\eta) \\ N_{kxu}(\xi,\eta) & N_{kxv}(\xi,\eta) & N_{kxw}(\xi,\eta) & N_{kxx}(\xi,\eta) & N_{kxy}(\xi,\eta) \\ N_{kyu}(\xi,\eta) & N_{kyv}(\xi,\eta) & N_{kyw}(\xi,\eta) & N_{kyx}(\xi,\eta) & N_{kyy}(\xi,\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}$$

En ne tenant pas compte des effets d'inertie, la matrice de masse a ainsi la forme suivante :

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}'_m & \mathbf{M}'_{mf} \\ \mathbf{M}'_{fm} & \mathbf{M}'_f \end{pmatrix}$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La partie membrane M'_m de la matrice élémentaire de masse se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_k N_p & 0 \\ 0 & N_k N_p \end{pmatrix} + \rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_k N_{pxu} + N_{kxu} N_p & N_k N_{pxv} + N_{kyu} N_p \\ N_k N_{pyu} + N_{kxv} N_p & N_k N_{pyv} + N_{kyv} N_p \end{pmatrix}$$
$$+ \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxu} N_{pxu} + N_{kyu} N_{pyu} & N_{kxu} N_{pxv} + N_{kyu} N_{pyv} \\ N_{pxu} N_{kxv} + N_{pyu} N_{kyv} & N_{kxv} N_{pxv} + N_{kyv} N_{pyv} \end{pmatrix}$$

La partie membrane-flexion M'_{mf} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_k N_{pxw} & N_k N_{pxx} & N_k N_{pxy} \\ N_k N_{pyw} & N_k N_{pyx} & N_k N_{pyy} \end{pmatrix}$$
$$+ \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxu} N_{pxw} + N_{kyu} N_{pyw} & N_{kxu} N_{pxx} + N_{kyu} N_{pyx} & N_{kxu} N_{pxy} + N_{kyu} N_{pyy} \\ N_{kxv} N_{pxw} + N_{kyv} N_{pyw} & N_{kxv} N_{pxx} + N_{kyv} N_{pyx} & N_{kxv} N_{pxy} + N_{kyv} N_{pyy} \end{pmatrix}$$

La partie flexion-membrane M'_{fm} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_{kxw} N_p & N_{kyw} N_p \\ N_{kxx} N_p & N_{kyx} N_p \\ N_{kxy} N_p & N_{kyy} N_p \end{pmatrix} + \rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxw} N_{pxu} + N_{kyw} N_{pyu} & N_{kxw} N_{pxv} + N_{kyw} N_{pyv} \\ N_{kxx} N_{pxu} + N_{kyx} N_{pyu} & N_{kxx} N_{pxv} + N_{kyx} N_{pyv} \\ N_{kxy} N_{pxu} + N_{kyy} N_{pyu} & N_{kxy} N_{pxv} + N_{kyy} N_{pyv} \end{pmatrix}$$

Le terme M'_f de flexion est composé des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_{kww} N_{pww} & N_{kww} N_{pwx} & N_{kww} N_{pwy} \\ N_{kwx} N_{pww} & N_{kwx} N_{pwx} & N_{kwx} N_{pwy} \\ N_{kwy} N_{pww} & N_{kwy} N_{pwx} & N_{kwy} N_{pwy} \end{pmatrix} +$$
$$\rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxw} N_{pxw} + N_{kyw} N_{pyw} & N_{kxw} N_{pxx} + N_{kyw} N_{pyx} & N_{kxw} N_{pxy} + N_{kyw} N_{pyy} \\ N_{kxx} N_{pxw} + N_{kyx} N_{pyw} & N_{kxx} N_{pxx} + N_{kyx} N_{pyx} & N_{kxx} N_{pxy} + N_{kyx} N_{pyy} \\ N_{kxy} N_{pxw} + N_{kyy} N_{pyw} & N_{kxy} N_{pxx} + N_{kyy} N_{pyx} & N_{kxy} N_{pxy} + N_{kyy} N_{pyy} \end{pmatrix}$$

4.5.2.2 Éléments du type DST

On sait que pour ces éléments on a $\beta_x = \gamma_x - w_{,x}$ et $\beta_y = \gamma_y - w_{,y}$ où la distorsion γ est constante sur l'élément.

Comme :

$$w = \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) w_k + (J_{11} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) + J_{21} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)) w_{,xk} +$$
$$(J_{12} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) + J_{22} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)) w_{,yk}$$

on peut aussi écrire :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{aligned} w \quad &= \sum_{k=1}^{N} N'_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) w_k + N'_{3(k-1)+2}(\xi,\eta)\beta_{xk} + N'_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)\beta_{yk} \\ &+ (J_{11}\bar{\gamma}_x + J_{12}\bar{\gamma}_y)\Sigma N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) + (J_{21}\bar{\gamma}_x + J_{22}\bar{\gamma}_y)\Sigma N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

où :

$$\begin{aligned} N'_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) &= N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) \\ N'_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) &= -J_{11} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) - J_{21} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \\ N'_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) &= -J_{12} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) - J_{22} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) &= \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+1}(\xi,\eta) \\ \Sigma N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) &= \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+2}(\xi,\eta) \\ \Sigma N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) &= \sum_{k=1}^{N} N_{3(k-1)+3}(\xi,\eta) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \end{pmatrix} = \mathbf{H}_{ct}^{-1}[(\mathbf{B}_{cm} + \mathbf{B}_{c\alpha}\mathbf{P}_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} + (\mathbf{B}_{c\beta} + \mathbf{B}_{c\alpha}\mathbf{P}_\beta)\begin{pmatrix} w_1 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \vdots \\ w_N \\ \beta_{xN} \\ \beta_{yN} \end{pmatrix}] = \mathbf{T}_{\gamma u}\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \vdots \\ u_N \\ v_N \end{pmatrix} + \mathbf{T}_{\gamma w}\begin{pmatrix} w_1 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \vdots \\ w_N \\ \beta_{xN} \\ \beta_{yN} \end{pmatrix}$$

On obtient alors l'interpolation pour w :

$$w = \sum_{k=1}^{N} N''_{5(k-1)+1}(\xi,\eta) u_k + N''_{5(k-1)+2}(\xi,\eta) v_k +$$

$$\sum_{k=1}^{N} N''_{5(k-1)+3}(\xi,\eta) w_k + N''_{5(k-1)+4}(\xi,\eta)\beta_{xk} + N''_{5(k-1)+5}(\xi,\eta)\beta_{yk}$$

où :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$
\begin{aligned}
N''_{5(k-1)+1}(\xi,\eta) &= (J_{11}T_{\gamma u}(1,2(k-1)+1)+J_{12}T_{\gamma u}(2,2(k-1)+1))\Sigma N_{3(j-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{21}T_{\gamma u}(1,2(k-1)+1)+J_{22}T_{\gamma u}(2,2(k-1)+1))\Sigma N_{3(j-1)+3}(\xi,\eta)\\
N''_{5(k-1)+2}(\xi,\eta) &= (J_{11}T_{\gamma u}(1,2(k-1)+2)+J_{12}T_{\gamma u}(2,2(k-1)+2))\Sigma N_{3(j-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{21}T_{\gamma u}(1,2(k-1)+2)+J_{22}T_{\gamma u}(2,2(k-1)+2))\Sigma N_{3(j-1)+3}(\xi,\eta)\\
N''_{5(k-1)+3}(\xi,\eta) &= N'_{3(k-1)+1}(\xi,\eta)\\
&+(J_{11}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+1)+J_{12}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+1))\Sigma N_{3(j-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{21}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+1)+J_{22}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+1))\Sigma N_{3(j-1)+3}(\xi,\eta)\\
N''_{5(k-1)+4}(\xi,\eta) &= N'_{3(k-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{11}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+2)+J_{12}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+2))\Sigma N_{3(j-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{21}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+2)+J_{22}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+2))\Sigma N_{3(j-1)+3}(\xi,\eta)\\
N''_{5(k-1)+5}(\xi,\eta) &= N'_{3(k-1)+3}(\xi,\eta)\\
&+(J_{11}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+3)+J_{12}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+3))\Sigma N_{3(j-1)+2}(\xi,\eta)\\
&+(J_{21}T_{\gamma w}(1,3(k-1)+3)+J_{22}T_{\gamma w}(2,3(k-1)+3))\Sigma N_{3(j-1)+3}(\xi,\eta)
\end{aligned}
$$

Ceci peut encore s'écrire de la manière suivante :

$$
\begin{pmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} N_{kwu}(\xi,\eta) & N_{kwv}(\xi,\eta) & N_{kww}(\xi,\eta) & N_{kwx}(\xi,\eta) & N_{kwy}(\xi,\eta) \\ N_{kxu}(\xi,\eta) & N_{kxv}(\xi,\eta) & N_{kxw}(\xi,\eta) & N_{kxx}(\xi,\eta) & N_{kxy}(\xi,\eta) \\ N_{kyu}(\xi,\eta) & N_{kyv}(\xi,\eta) & N_{kyw}(\xi,\eta) & N_{kyx}(\xi,\eta) & N_{kyy}(\xi,\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}
$$

La matrice de masse a ainsi la forme suivante :

$$
M = \begin{pmatrix} M'_m & M'_{mf} \\ M'_{fm} & M'_f \end{pmatrix}
$$

La partie membrane M'_m de la matrice élémentaire de masse se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$
\rho_m \begin{pmatrix} N_k N_p + N_{kwu} N_{pwu} & N_{kwu} N_{pwv} \\ N_{kwv} N_{pwu} & N_k N_p + N_{kwv} N_{pwv} \end{pmatrix} + \rho'_{mf} \begin{pmatrix} N_k N_{pxu} + N_{kxu} N_p & N_k N_{pxv} + N_{kyu} N_p \\ N_k N_{pyu} + N_{kxv} N_p & N_k N_{pyv} + N_{kyv} N_p \end{pmatrix}
$$
$$
+\rho'_f \begin{pmatrix} N_{kxu} N_{pxu} + N_{kyu} N_{pyu} & N_{kxu} N_{pxv} + N_{kyu} N_{pyv} \\ N_{pxu} N_{kxv} + N_{pyu} N_{kyv} & N_{kxv} N_{pxv} + N_{kyv} N_{pyv} \end{pmatrix}
$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

La partie membrane-flexion M'_{mf} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m\begin{pmatrix} N_{kwu}N_{pww} & N_{kwu}N_{pwx} & N_{kwu}N_{pwy} \\ N_{kwv}N_{pww} & N_{kwv}N_{pwx} & N_{kwv}N_{pwy} \end{pmatrix}+\rho'_{mf}\begin{pmatrix} N_kN_{pxw} & N_kN_{pxx} & N_kN_{pxy} \\ N_kN_{pyw} & N_kN_{pyx} & N_kN_{pyy} \end{pmatrix}$$
$$+\rho'_f\begin{pmatrix} N_{kxu}N_{pxw}+N_{kyu}N_{pyw} & N_{kxu}N_{pxx}+N_{kyu}N_{pyx} & N_{kxu}N_{pxy}+N_{kyu}N_{pyy} \\ N_{kxv}N_{pxw}+N_{kyv}N_{pyw} & N_{kxv}N_{pxx}+N_{kyv}N_{pyx} & N_{kxv}N_{pxy}+N_{kyv}N_{pyy} \end{pmatrix}$$

La partie flexion-membrane M'_{fm} se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m\begin{pmatrix} N_{kww}N_{pwu} & N_{kww}N_{pwv} \\ N_{kwx}N_{pwu} & N_{kwx}N_{pwv} \\ N_{kwy}N_{pwu} & N_{kwy}N_{pwv} \end{pmatrix}+\rho'_{mf}\begin{pmatrix} N_{kxw}N_p & N_{kyw}N_p \\ N_{kxx}N_p & N_{kyx}N_p \\ N_{kxy}N_p & N_{kyy}N_p \end{pmatrix}$$
$$+\rho'_f\begin{pmatrix} N_{kxw}N_{pxu}+N_{kyw}N_{pyu} & N_{kxw}N_{pxv}+N_{kyw}N_{pyv} \\ N_{kxx}N_{pxu}+N_{kyx}N_{pyu} & N_{kxx}N_{pxv}+N_{kyx}N_{pyv} \\ N_{kxy}N_{pxu}+N_{kyy}N_{pyu} & N_{kxy}N_{pxv}+N_{kyy}N_{pyv} \end{pmatrix}$$

Le terme M'_f de flexion est composé des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m\begin{pmatrix} N_{kww}N_{pww} & N_{kww}N_{pwx} & N_{kww}N_{pwy} \\ N_{kwx}N_{pww} & N_{kwx}N_{pwx} & N_{kwx}N_{pwy} \\ N_{kwy}N_{pww} & N_{kwy}N_{pwx} & N_{kwy}N_{pwy} \end{pmatrix}+$$
$$\rho'_f\begin{pmatrix} N_{kxw}N_{pxw}+N_{kyw}N_{pyw} & N_{kxw}N_{pxx}+N_{kyw}N_{pyx} & N_{kxw}N_{pxy}+N_{kyw}N_{pyy} \\ N_{kxx}N_{pxw}+N_{kyx}N_{pyw} & N_{kxx}N_{pxx}+N_{kyx}N_{pyx} & N_{kxx}N_{pxy}+N_{kyx}N_{pyy} \\ N_{kxy}N_{pxw}+N_{kyy}N_{pyw} & N_{kxy}N_{pxx}+N_{kyy}N_{pyx} & N_{kxy}N_{pxy}+N_{kyy}N_{pyy} \end{pmatrix}$$

4.5.2.3 Éléments du type Q4γ

On procède de la même façon que pour les éléments du type DST mais avec :

$$\begin{pmatrix} \bar{\gamma}_x \\ \bar{\gamma}_y \end{pmatrix}=B_c\begin{pmatrix} w_1 \\ \beta_{x1} \\ \beta_{y1} \\ \vdots \\ w_N \\ \beta_{xN} \\ \beta_{yN} \end{pmatrix}$$

où : B_c est la matrice établie au [§4.3.1].

On en déduit que :

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

$$\begin{pmatrix} w \\ \beta_x \\ \beta_y \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{pmatrix} 0 & 0 & N_{kww}(\xi,\eta) & N_{kwx}(\xi,\eta) & N_{kwy}(\xi,\eta) \\ 0 & 0 & 0 & N_k(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_k(\xi,\eta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \\ w_k \\ \beta_{xk} \\ \beta_{yk} \end{pmatrix}$$

La matrice de masse a ainsi la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} M'_m & 0 \\ 0 & M'_f \end{pmatrix}$$

La partie membrane M'_m de la matrice élémentaire de masse se compose des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_k N_p & 0 \\ 0 & N_k N_p \end{pmatrix}$$

Le terme M'_f de flexion est composé des blocs kp (k ième ligne et p ième colonne) suivants :

$$\rho_m \begin{pmatrix} N_{kww}N_{pww} & N_{kww}N_{pwx} & N_{kww}N_{pwy} \\ N_{kwx}N_{pww} & N_{kwx}N_{pwx} & N_{kwx}N_{pwy} \\ N_{kwy}N_{pww} & N_{kwy}N_{pwx} & N_{kwy}N_{pwy} \end{pmatrix} + \rho'_f \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_k N_p & 0 \\ 0 & 0 & N_k N_p \end{pmatrix}$$

4.5.2.4 Remarque

On néglige dans l'expression de la matrice de masse élémentaire sans excentrement les termes d'inertie de rotation $\int_S \rho_f(\ddot{\beta}_x \delta\beta_x + \ddot{\beta}_y \delta\beta_y) dS$ car ces derniers sont négligeables par rapport aux autres. En effet un facteur multiplicatif de $h^2/12$ les lie aux autres termes et ils deviennent négligeables pour un rapport épaisseur sur longueur caractéristique inférieur à $1/10$. Lorsque l'excentrement est introduit, ces termes de la forme $\int_S (\rho_f + 2\mathrm{d}\,\rho_{mf} + d^2\rho_m)(\ddot{\beta}_x \delta\beta_x + \ddot{\beta}_y \delta\beta_y) dS$ ne sont plus négligeables et sont introduits dans l'expression de la matrice de masse.

5 Mise en œuvre et post-traitements

L'excentrement est introduit par le mot-clé facultatif EXCENTREMENT au niveau de AFFE_CARA_ELEM de la même manière que l'épaisseur selon les modalités définies en introduction. Quand ce mot-clé n'est pas présent l'excentrement vaut zéro par défaut.

5.1 Application des efforts et couples

Tous les calculs sont faits dans le repère d'épure (plan du maillage). Si on définit des forces ou des couples par rapport à un autre repère, l'utilisateur devra faire pour FORCE_ARETE et FORCE_NODALE

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

les transformations nécessaires pour se ramener au repère de maillage. Pour FORCE_COQUE l'utilisateur pourra préciser le plan d'application des efforts et la conversion vers le repère de calcul sera automatique.

On introduit ainsi dans AFFE_CHAR_MECA la notion de plan d'application des efforts par le mot-clé PLAN sous FORCE_COQUE. Ce plan d'application est différent du plan de référence ou plan d'épure sur lequel s'appuie le maillage. Pour ce mot-clé on définira les quatre possibilités suivantes d'application des forces :'INF' 'MOY' 'SUP' 'MAIL' . 'INF' 'MOY' et 'SUP' signifient que l'on applique les efforts en peau inférieure, moyenne et supérieure de plaque respectivement. 'MAIL' signifie que l'on applique les efforts au niveau du plan de référence ou plan du maillage. Par défaut les efforts seront appliqués sur le plan du maillage de la plaque. Sont concernés les efforts de type FORCE_COQUE du TE0032.

En repère local à l'élément, lorsque les forces et les couples sont aplliqués sur 'MOY' on utilise la simple relation de passage :

$$c'_x = c_x - df_y$$
$$c'_y = c_y + df_x$$

pour ramener les efforts et les couples dans le repère du maillage où on fait les calculs.

En repère local à l'élément, lorsque les forces et les couples sont appliqués sur 'SUP' on utilise la simple relation de passage :

$$c'_x = c_x - (d + h/2) f_y$$
$$c'_y = c_y + (d + h/2) f_x$$

En repère local à l'élément, lorsque les forces et les couples sont appliqués sur 'INF' on utilise la simple relation de passage :

$$c'_x = c_x - (d - h/2) f_y$$
$$c'_y = c_y + (d - h/2) f_x$$

Si les efforts sont donnés dans le repère global de l'élément , on utilise des relations de passage du type : $c' = c + (d + \varepsilon h/2) n \wedge f$ où c est défini par rapport au repère 'INF' 'MOY' 'SUP' avec ε égal à -1, 0 et 1, respectivement. Lorsqu'il n'y a pas d'excentrement, la formule précédente se réduit à $c' = c + \varepsilon h/2 \mathrm{n} \wedge f$.

Remarque :

Pour les chargements de type FORCE_ARETE ou FORCE_NODALE les efforts et couples ne peuvent être exprimés que par rapport au repère du maillage. Si l'utilisateur ne les connaît que par rapport au feuillet moyen de la plaque, il devra effectuer le changement de repère à la main pour avoir l'expression des efforts et des couples par rapport à la surface de maillage. La relation à utiliser est $c' = c + dn \wedge f$ où d est la distance entre le plan de calcul et le plan de chargement orientée par la normale à la coque. Il est évident que l'utilisateur a intérêt à ce que le plan de chargement soit le plan du maillage, mais il n'est pas toujours possible de faire coïncider ces deux plans comme on peut le voir sur la partie gauche de la figure de la page 6.

5.2 Application des conditions aux limites en déplacement

Pour les conditions aux limites de type déplacement l'utilisateur devra faire attention au fait qu'elles ne peuvent s'appliquer que sur le repère de maillage. Les relations de passage par rapport à des conditions données sur le feuillet moyen sont les suivantes :

$$\theta_{ref} = \theta_{moy}$$
$$u_{ref} = u_{moy} - \theta_{moy} \wedge dn$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

5.3 Post-traitements

Pour les post-traitements, les résultats par défaut de type efforts généralisés sont donnés dans le repère correspondant au plan d'épure. Pour les avoir dans les autres repères, il faudra que l'utilisateur indique le plan de post-traitement et les changements de repères seront automatiques.

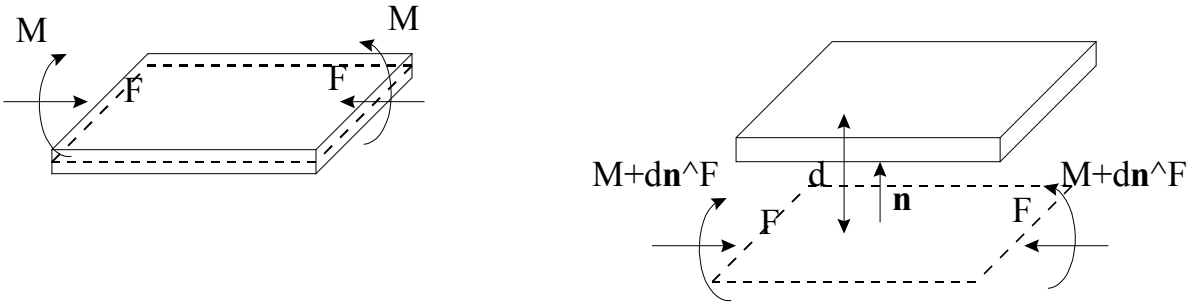
Pour le post-traitement des efforts généralisés, on pourra les calculer dans le feuillet moyen de la coque via la commande POST_CHAMP / COQUE_EXCENT.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

6 Validation statique et modale

6.1 Validation initiale

La première partie de la validation consiste à tester une plaque simple soumise à des forces et couples et dont le plan de maillage ne coïncide pas avec le plan du feuillet moyen sur lequel sont appliqués les efforts. Pour la plaque soumise à des forces et des couples, les résultats avec et sans excentrement doivent tenir compte du changement de repère pour les couples comme indiqué ci-dessous.



Les déplacements sont liés de la manière suivante pour un point situé à une hauteur z par rapport au feuillet moyen :

$$u = u_{moy} + \theta_{moy} \wedge zn = u_{ref} + \theta_{ref} \wedge (z+d)\, n$$

ce qui s'écrit encore :

$$\theta_{moy} = \theta_{ref}$$
$$u_{moy} = u_{ref} + \theta_{ref} \wedge dn$$

ce qui nous permet d'établir les relations de passage entre les déplacements par rapport au feuillet moyen et ceux par rapport au plan de référence.

Pour les efforts généralisés, dans les deux cas de figure précédents, on a les mêmes résultats sur les feuillets moyen, inférieur et supérieur de plaque.

6.2 Cas-test SSLS111 : excentrement pour des plaques simples

Il s'agit d'un calcul en flexion d'un bicouche constitué de deux matériaux isotropes différents. On étudie le couplage membrane-flexion. Le calcul de référence est celui d'un bicouche défini par DEFI_COMPOSITE composé des deux matériaux isotropes différents (non symétrie suivant z). L'autre modélisation est composée de deux plaques excentrées par rapport à la fibre moyenne de la plaque utilisée avec DEFI_COMPOSITE . Les résultats, identiques d'une modélisation à l'autre, sont donnés en terme de déplacements et d'efforts généralisés. De plus on effectue sur la géométrie de ce test une analyse modale pour les deux modélisations : les fréquences propres trouvées sont identiques.

6.3 Cas-test SSLS112 : excentrement pour des plaques composites

Il s'agit d'un calcul en flexion d'un quadricouche présentant une non-symétrie matérielle par rapport à son plan moyen. Le calcul de référence utilise un quadricouches défini par DEFI_COMPOSITE. L'autre modélisation utilise deux bicouches définis par DEFI_COMPOSITE mais excentrés par rapport à la fibre moyenne du quadricouche. Les résultats, identiques d'une modélisation à l'autre, sont donnés en terme de déplacements.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

7 Conclusion

Les éléments finis de plaque que nous décrivons ici sont utilisés dans les calculs de structures minces élancées dont le rapport épaisseur sur longueur caractéristique est inférieur à $1/10$. Le feuillet moyen de ces structures ne coïncide pas avec le plan du maillage (plan d'épure). L'excentrement correspond donc à la distance du feuillet moyen par rapport au feuillet d'épure. Un excentrement d positif signifie que la surface moyenne de la plaque est à une distance $d\,\boldsymbol{n}$ de l'élément de plaque maillé, la direction $\boldsymbol{n}$ étant donnée par la normale à l'élément.
Les valeurs de déplacements et d'efforts généralisés obtenus sont donnés par défaut dans le repère du maillage. Pour les efforts généralisés, on peut cependant définir un repère de post-traitement - repère associé au feuillet moyen - différent du repère d'épure. De la même manière, les efforts appliqués sont considérés comme étant donné par défaut dans le repère d'épure. Dans le cas de FORCE_COQUE, on peut cependant préciser un repère d'application des efforts et couples - repère associé au feuillet moyen - différent du repère d'épure.
Des éléments équivalents ne sont pas disponibles en thermique ; les chaînages thermo-mécaniques ne sont donc pas disponibles pour les éléments de plaques excentrés.

8 Références bibliographiques

[1] J.L. BATOZ, G.DHATT : "Modélisation des structures par éléments finis : poutres et plaques ", Hermès, Paris, 1992.

[2] D. BUI : "Le cisaillement dans les plaques et les coques : modélisation et calcul", Note HI-71/7784, 1992.

[3] J.G. REN : "A new theory of laminated plate ", Composite Science and Technology, Vol.26, p.225-239,1986.

[4] T.A. ROCK, E. HINTON : "A finite element method for the free vibration of plates allowing for transverse shear deformation ", Computers and Structures, Vol.6, p.37-44,1976.

[5] T.J.R. HUGHES : "The finite element method", Prentice Hall,1987.

[6] E. HINTON, T. ROCK et O.C. ZIENKIEWICZ : "A note on Mass Lumping and Related Processes in the Finite Element Method ", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol4, p. 245-249, 1976.

[7] F. VOLDOIRE : "Modélisation par homogénéisation thermique et thermo-élastique de composants mécaniques minces", CR MMN/97/091.

[8] P. MASSIN, F. VOLDOIRE, S. ANDRIEUX : "Modèle de thermique pour les coques minces", Manuel de Référence du *Code_Aster [*R3.11.01].

[9] F. VOLDOIRE : "Cylindre creux thermoélastique ", Manuel de Validation du *Code_Aster* [V7.01.100].

[10] A.K. NOOR, W.S. BURTON : "Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates ", ASME, Applied Mechanics Review, Vol.42, N°1, p.1-13,1989.

[11] A.K. NOOR, W.S. BURTON, J.M. PETERS : "Assessment of computational models for multilayered composite cylinders " in Analytical and Computational Models of Shells, Noor et al. Eds, ASME, CED - Vol.3, p.419-442,1989.

9 Description des versions du document

Version Aster	Auteur(s) Organisme(s)	Description des modifications
6.3	P.MASSIN	Texte initial

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

	EDF-R&D/AMA	

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Annexe 1 Facteurs de correction de cisaillement transverse pour des plaques orthotropes ou stratifiées excentrées

La matrice H_{ct} est définie de sorte que la densité surfacique d'énergie de cisaillement transverse obtenue dans le cas de la distribution tridimensionnelle des contraintes issues de la résolution de l'équilibre soit égale à celle du modèle de plaque basé sur les hypothèses de Reissner, pour un comportement en flexion simple. On doit ainsi trouver H_{ct} telle que :

$$\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} \tau\, H_g^{-1}\tau = \frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{H}_{\mathbf{ct}}^{-1}T = \frac{1}{2}\gamma\, H_{ct}\gamma \text{ avec } \tau=\begin{pmatrix}\sigma_{xz}\\ \sigma_{yz}\end{pmatrix} \text{ et } T=\int_{-h/2}^{+h/2}\tau\, dz = H_{ct}\gamma\ .$$

Pour obtenir H_{ct} on utilise la distribution de τ suivant z obtenue à partir de la résolution des équations d'équilibre 3D sans couples extérieurs :

$$\sigma_{xz}=-\int_{-h/2}^{z}(\sigma_{xx,x}+\sigma_{xy,y})d\zeta\,;\, s_{yz}=-\int_{-h/2}^{z}(\sigma_{xy,x}+\sigma_{yy,y})d\zeta \text{ avec } \sigma_{xz}=\sigma_{yz}=0 \text{ pour } z=\pm h/2\ .$$

Dans le cas où il n'y a pas de couplage membrane flexion (symétrie par rapport à $z=0$), les contraintes dans le plan de l'élément $\sigma_{xx},\sigma_{yy},\sigma_{xy}$ ont pour expression dans le cas d'un comportement de flexion pure :

$$\sigma = zA(z)M \text{ avec } A(z)=H(z)H_f^{-1}\ .$$

Si $H(z)$ et H_f ne dépendent pas de x et y on peut déterminer H_{ct} . En effet :

$$\tau(z)=D_1(z)T+D_2(z)\lambda \text{ où } T=\begin{pmatrix}T_x\\ T_y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}M_{xx,x}+M_{xy,y}\\ M_{xy,x}+M_{yy,y}\end{pmatrix} \text{ et } \lambda=\begin{pmatrix}M_{xx,x}-M_{xy,y}\\ M_{xy,x}-M_{yy,y}\\ M_{yy,x}\\ M_{xx,y}\end{pmatrix}$$

ainsi que :

$$\mathbf{D}_1=-\int_{-h/2}^{z}\frac{z}{2}\begin{pmatrix}A_{11}+A_{33} & A_{13}+A_{32}\\ A_{31}+A_{23} & A_{22}+A_{33}\end{pmatrix}dz\ ,$$

$$\mathbf{D}_2=-\int_{-h/2}^{z}\frac{z}{2}\begin{pmatrix}A_{11}-A_{33} & A_{13}-A_{32} & 2A_{12} & 2A_{31}\\ A_{31}-A_{23} & A_{33}-A_{22} & 2A_{32} & 2A_{21}\end{pmatrix}dz\ .$$

Il en résulte que $\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} t\,\mathbf{H}_g^{-1}t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{C_{11}} & \mathbf{C_{12}}\\ \mathbf{C}_{12}^T & \mathbf{C_{22}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{T}\\ \lambda\end{pmatrix}$ avec :

$$\mathbf{C_{11}}=\int_{-h/2}^{+h/2}\mathbf{D}_1^T\mathbf{H}_g^{-1}\mathbf{D}_1\,dz\,;$$

$$\mathbf{C_{12}}=\int_{-h/2}^{+h/2}\mathbf{D}_1^T\mathbf{H}_g^{-1}\mathbf{D}_2\,dz\,;$$

$$\mathbf{C_{22}}=\int_{-h/2}^{+h/2}\mathbf{D}_2^T\mathbf{H}_g^{-1}\mathbf{D}_2\,dz$$

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)

Comme par ailleurs $\frac{1}{2}\int_{-h/2}^{+h/2} t\, H_g^{-1} t = \frac{1}{2}\mathbf{T}\mathbf{H}_{\mathbf{ct}}^{-1} T$ on propose de prendre $H_{\mathbf{ct}} = C_{\mathbf{11}}^{-1}$ pour satisfaire au mieux les deux équations quels que soient T et λ.

En comparant $H_{\mathbf{ct}}$ ainsi calculée avec $\bar{H}_{\mathbf{ct}} = \int_{-h/2}^{+h/2} H_g\, dz$ on fait apparaître les coefficients de correction de cisaillement transverse suivant : $k_1 = H_{ct}^{11} / \bar{H}_{ct}^{11}$; $k_{12} = H_{ct}^{12} / \bar{H}_{ct}^{12}$; $k_2 = H_{ct}^{22} / \bar{H}_{ct}^{22}$.

Pour une plaque homogène, isotrope ou anisotrope, on trouve ainsi : $\mathbf{H}_{\mathbf{ct}} = kh\mathbf{H}_g$ avec $k = 5/6$.

Remarques :

Cette méthode n'est valide que lorsque la plaque composite est symétrique par rapport à z=0.

- Pour un matériau multicouche , on établit que :

$$\mathbf{C_{11}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{h_i}{4} \Big(\sum_{p=1}^{i-1} h_p h_p \mathbf{A}_p^T - \frac{1}{2} z_i^2 \mathbf{A}_i^T \Big) \mathbf{H}_g^{-1} \Big(\sum_{p=1}^{i-1} h_p h_p \mathbf{A}_p - \frac{1}{2} z_i^2 \mathbf{A}_i \Big) +$$
$$\frac{1}{24}(z_{i+1}^3 - z_i^3)\Big[\mathbf{A}_i^T \mathbf{H}_g^{-1} \Big(\sum_{p=1}^{i-1} h_p h_p \mathbf{A}_p - \frac{1}{2} z_i^2 \mathbf{A}_i \Big) + \Big(\sum_{p=1}^{i-1} h_p h_p \mathbf{A}_p^T - \frac{1}{2} z_i^2 \mathbf{A}_i^T \Big) \mathbf{H}_g^{-1} \mathbf{A}_i \Big]$$
$$+ \frac{1}{80}(z_{i+1}^5 - z_i^5)\, \mathbf{A}_i^T \mathbf{H}_g^{-1} \mathbf{A}_i$$

où : $h_i = z_{i+1} - z_i$, $h_i = \frac{1}{2}(z_{i+1} + z_i)$ et $\mathbf{A}_i$ représente la matrice $\begin{pmatrix} A_{11}+A_{33} & A_{13}+A_{32} \\ A_{31}+A_{23} & A_{22}+A_{33} \end{pmatrix}$ pour la couche i.

- La validité du choix $\mathbf{H}_{\mathbf{ct}} = \mathbf{C}_{\mathbf{11}}^{-1}$ peut être examinée a posteriori lorsque l'on a une estimation de la solution (champs de déplacements et de contraintes planes, notamment). On peut alors estimer l'écart entre les deux estimations sur l'énergie. Une démarche de calcul en deux étapes pour les plaques et coques multicouches (avec $\mathbf{H}_{\mathbf{ct}}$ diagonale et deux coefficients k_1 et k_2) a d'ailleurs été développée par Noor et Burton [bib10] [bib11].

- Dans le cas d'une plaque homogène isotrope ou anisotrope l'égalité entre les deux énergies est satisfaite au sens strict puisque $D_2 = 0$. Le choix fait ci-dessus est alors valide et aucun examen a posteriori n'est nécessaire.

Copyright 2015 EDF R&D - Document diffusé sous licence GNU FDL (http://www.gnu.org/copyleft/fdl.html)